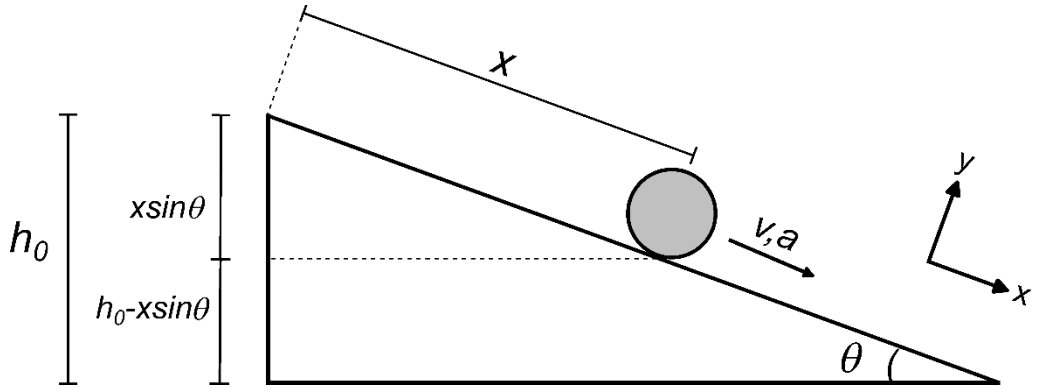
KALTEVA TASO

1 Johdanto



Kuva 1. *Sylinteri (massa m, säde r) vierii liukumatta alas kaltevaa tasoa. Sen massakeskipisteellä on nopeus v sekä kiihtyvyys a.*

Työssä päästetään erimuotoisia kappaleita vierimään tai liukumaan kaltevaa tasoa pitkin kuvan 1 mukaisesti ja tutkitaan niiden liikettä. Tarkastellaan tilannetta, jossa kappale vierii liukumatta tasoa alas. Tällöin pyörimisliikkeen energia on otettava huomioon, jolloin kappaleen kineettinen energia on

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{1}$$

missä I on kappaleen hitausmomentti massakeskipisteen suhteen ja ω kulmanopeus. Lausumalla kulmanopeus nopeuden avulla ($\omega = \frac{v}{r}$) saadaan kineettiseksi energiaksi

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2. \tag{2}$$

Kiinnitetään paikan x-koordinaatin nollakohta kappaleen lähtöpisteeseen, jolloin kappaleen korkeus $h = h_0 - x\sin\theta$. Tämän perusteella saadaan kokonaisenergiaksi

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 + mgh = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 + mgh_0 - mgx\sin\theta. \tag{3}$$

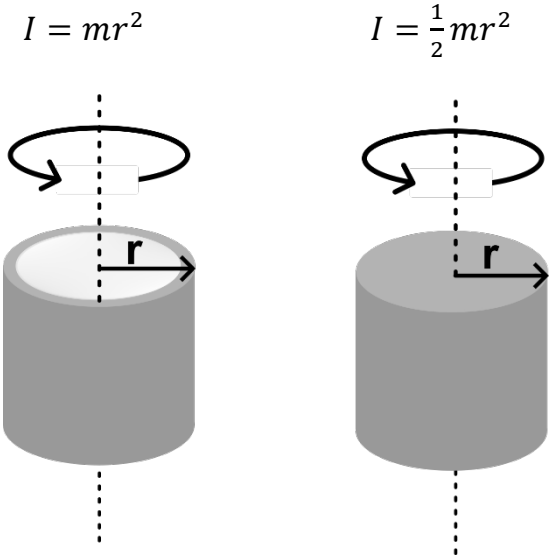
Mekaanisen energian säilymisen perusteella saadaan tässä tapauksessa yhtälö

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v\frac{dv}{dt} - mg\frac{dx}{dt}\sin\theta. \tag{4}$$

Koska kiihtyvyys $a = \frac{dv}{dt}$ ja nopeus $v = \frac{dx}{dt}$, voidaan yhtälöstä (4) ratkaista massakeskipisteen kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}. \tag{5}$$

Yhtälöstä (5) huomataan, että vierivän kappaleen kiihtyvyys riippuu sen hitausmomentista. Työssä käytettävien vieritettävien kappaleiden hitausmomentit on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. *Kappaleen hitausmomentti I riippuu sen massan jakautumisesta pyörimisakselin suhteen. Kuvassa on esitetty ohutreunaisen sylinterin (renkaan) ja umpinaisen sylinterin hitausmomentit.*

Kappaleen vierimisen saa aikaan kitkavoima f_s, joka aiheuttaa siihen vääntömomenttia massakeskipisteen suhteen. Pyörimisliikkeelle massakeskipisteen suhteen pätee

$$\tau_{tot} = I\alpha, \tag{6}$$

jossa τ_{tot} on kokonaisvääntömomentti ja α kulmakiihtyvyys. Koska kitkavoima on ainoa vääntömomenttia aiheuttava voima, saadaan yhtälön (6) perusteella.

$$\tau_{tot} = f_s r = I\alpha. \tag{7}$$

Kun kappale vierii liukumatta, sen massakeskipisteen kiihtyvyyttä ja kulmakiihtyvyyttä yhdistää yhtälö

$$a = r\alpha. \tag{8}$$

Yleisesti ottaen kitkavoiman f_s maksimiarvo on $f_s^{max} = \mu_S N$, jossa μ_S on lepokitkakerroin ja N on normaalivoima. Kappale vierii liukumatta mikäli $f_S \leq \mu_S N$. Yhtälöiden (5), (7) ja (8) perusteella voidaan kirjoittaa

$$f_s = \frac{I\alpha}{r} = \frac{Ia}{r^2} = \left(\frac{I}{r^2}\right)\left(\frac{gsin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}\right) = \frac{mgIsin\theta}{mr^2+I}. \tag{9}$$

Normaalivoima on tässä tapauksessa $N = mgcos\theta$, joten vierimisehdoksi saadaan

$$\frac{mgIsin\theta}{mr^2+I} \leq \mu_S mgcos\theta. \tag{10}$$

Yhtälöstä (10) saadaan ratkaistua lepokitkakertoimelle vierimisehdoksi

$$\mu_S \geq \frac{tan\theta}{1+\frac{mr^2}{I}}. \tag{11}$$

Kappale lähtee siis liukumaan, jos

$$tan\theta > \mu_S\left(1+\frac{mr^2}{I}\right). \tag{12}$$

Mikäli kyseessä olisi tasomainen kappale, joka voi vain liukua, kitkavoiman maksimiarvo olisi $f_s^{max} = mgsin\theta$ ja liukumisehdoksi saataisiin vastaavasti

$$tan\theta > \mu_S. \tag{13}$$

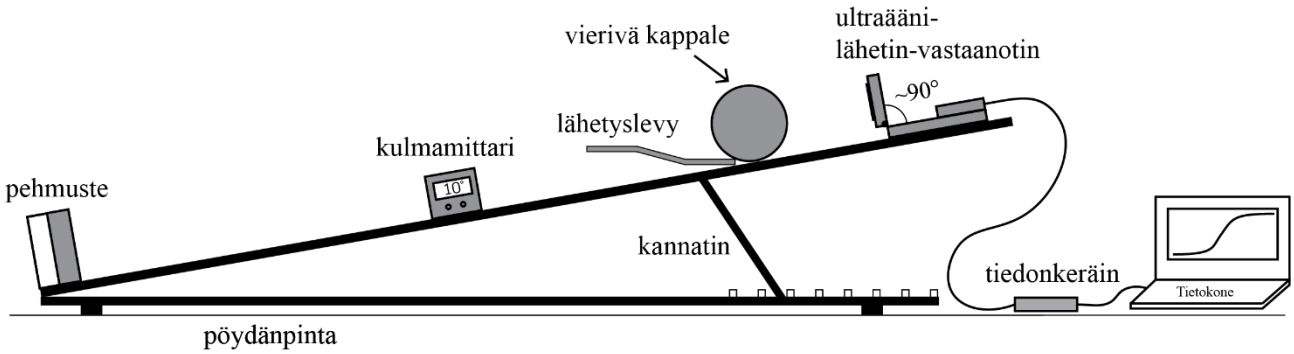
2 Tavoitteet

Työn tehtyään opiskelija

- on käytännössä havainnut erilaisten kappaleiden muodon ja massan vaikutuksen vierimisliikkeeseen.
- osaa ratkaista kaltevalla tasolla vierivän kappaleen kiihtyvyyden.
- ymmärtää vierimisen ja liukumisen välisen eron.
- osaa esittää mittaustulokset kuvaajan avulla sekä sovittaa suoran pisteistöön.

3 Laitteisto

3.1 Laitteiston osat



Kuva 3. *Mittauslaitteisto.*

Työn mittauslaitteisto on esitetty kuvassa 3. Kappaleet päästetään vierimään tai liukumaan pitkin kaltevaa tasoa, jonka kulmaa voidaan säätää. Tason kulma vaakatasoon nähden voidaan mitata siihen kiinnitetyllä digitaalisella kulmamittarilla (valmistajan ilmoittama virhearvio ± 0,2°). Kappaleen paikkaa mitataan ultraäänilähetin-vastaanottimella, joka lähettää tihein väliajoin (20 1/s) ultraäänipulsseja. Ultraäänipulssit heijastuvat kappaleesta ja palaavat takaisin ultraäänilähetin-vastaanottimeen. Ultraäänianturi on kiinnitetty LabQuest Mini -tiedonkeräimeen, joka puolestaan on yhdistetty tietokoneeseen. Ultraäänipulssien aikaerosta saadaan kappaleen paikka, josta puolestaan voidaan määrittää sekä kappaleen nopeus että kiihtyvyys. Anturidataa voidaan tarkastella tietokoneelta.

Lisäksi tarvitaan:

- *Vieritettävät kappaleet*
  - *Umpinainen alumiinisylinteri (massa ≈ 1 kg, halkaisija ≈ 10 cm)*
  - *Umpinainen muovisylinteri (massa ≈ 530 g, halkaisija ≈ 10 cm)*
  - *Sylinterimäinen teräsrengas (massa ≈ 530 g, ulkohalkaisija ≈ 10 cm)*
  - *Sylinterimäinen alumiinirengas (massa ≈ 230 g, ulkohalkaisija ≈ 10 cm)*
  - *Sylinterimäinen alumiinirengas (massa ≈ 90 g, ulkohalkaisija ≈ 5 cm)*

3.2 Muuta huomioitavaa laitteistosta

Varoitukset!

Kun säädät laitteiston kulmaa, huolehdi etteivät sormesi jää puristuvien tasojen väliin! Kappaleiden reunat voivat myös olla teräviä, joten varo niitäkin.

Digitaalinen kulmamitta on kiinnitetty magneeteilla, jotka voivat haitata esimerkiksi sydämentahdistimien tai mekaanisten rannekellojen toimintaa.

4 Esitehtävät

Tutustu työhön liittyvään teoriaan haluamastasi fysiikan oppikirjasta esim. [1–3], lue työohje läpi ja vastaa alla oleviin kysymyksiin vastauslomakkeeseen.

1. Tarkastellaan tämän työohjeen kuvan 1 mukaista tilannetta. Oletetaan, että kappaleen ja tason välillä ei ole ollenkaan kitkaa. Mitä kappaleelle tapahtuu, kun se päästetään vapaasti liikkumaan?
   a. Se jää paikalleen.
   b. Se lähtee vierimään tasoa alas.
   c. Se lähtee liukumaan tasoa alas.

   Valitse joku vaihtoehdoista a-c ja perustele vastauksesi.
2. Mitkä tekijät vaikuttavat vierivän kappaleen kiihtyvyyteen?
3. Kappale vierii alas tasoa. Piirrä vastauslomakkeessa olevaan kuvaan kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat ja nimeä ne.

5 Mittaukset

Kaikki mittaustulokset ja kysymysten vastaukset kirjataan vastauslomakkeelle.

5.1 Vierimisnopeuteen vaikuttavat tekijät

1. **Tee hypoteesi:** Työssä käytettävät kappaleet on valittu niin, että niillä voisi tutkia massan, muodon (umpinainen/rengas) sekä koon (ulkohalkaisijan) vaikutusta vierimisliikkeeseen. Tee hypoteesi kappaleiden vierimisnopeudesta. Missä järjestyksessä työn kappaleet saavuttavat kaltevan tason pään, jos ne päästetään vierimään rinnakkain tason ylhäältä alas saakka? Varsinaista vierimisnopeutta ei tarvitse määrittää, ainoastaan järjestys suhteessa toisiinsa. Perustele vastauksesi fysiikan avulla.

2. **Testaa tekemääsi hypoteesia:** Vieritä kappaleita esimerkiksi pareittain alas tasoa päästäen ne liikkeelle samanaikaisesti ja tee havaintoja vierimisnopeudesta. Käytä lähetyslevyä apuna saadaksesi kappaleet lähtemään liikkeelle nykimättä ja samanaikaisesti. Kannattaa tehdä jokainen mittaus vaikkapa kahteen kertaan, sillä lähettäminen ei aina onnistu hyvin. Vastaavatko tulokset tekemääsi hypoteesia? Jos eivät, pohdi miksi.

5.2 Kiihtyvyyden riippuvuus kallistuskulmasta

1. Kiinnitä ultraäänianturi LabQuest-tiedonkeräimen DIG 1 -porttiin ja tiedonkeräin tietokoneen USB-porttiin. Tarkista, että ultraäänianturissa oleva kytkin on ”vaunu”-asennossa. Käynnistä valmis mittaustiedosto Kalteva_taso.cmbl tietokoneen työpöydän kansiosta ”Mittauspohjat”.
2. Aseta kalteva taso alhaisimpaan asentoonsa eli pienimpään mahdolliseen kallistuskulmaan.
3. Laita digitaalinen kulmamittari päälle. Jos mittarin yläkulmassa näkyy kirjain ”S”, paina lyhyesti ”zero”-näppäintä ja odota, että kirjain häviää.
4. Valitse yksi kappaleista, jonka halkaisija on noin 10 cm ja aseta se tason yläosaan anturin eteen (etäisyyden anturista oltava > 15 cm). Voit pitää kappaletta paikallaan sormella tai lähetyslevyllä.
5. Nollaa paikka-anturi valitsemalla ohjelmasta: Experiment → Zero tai painamalla Ctrl+0.
6. Tee testimittaus. Aloita mittaus painamalla ”Collect” tai painamalla välilyöntinäppäintä ja päästä heti kappale irti. Kiihtyvyyden tulisi olla alun jälkeen tasaista. Mittausaika on asetettu tahallaan lyhyeksi. Jos kiihtyvyyskuvaajassa on piikkejä tai runsaasti hajontaa, kannattaa ultraäänilähetin-vastaanottimen oikea asento tarkistaa. Lähetin-vastaanottimen tulisi olla suunnilleen kohtisuorassa kappaleeseen nähden. Oikea kulma löytyy kokeilemalla.
7. Mittaa kappaleen paikkaa, nopeutta ja kiihtyvyyttä, kun se vierii alas kaltevaa tasoa eri kallistuskulmilla. Käytä lähetyslevyä pitämään kappaletta alussa paikallaan. Lue kulmat digitaalisesta kulmamittarista ja kirjaa ne vastauslomakkeeseen. Mittaa ainakin viidellä eri kulmalla vaihtelemalla kannattaminen paikkaa. Lisää vaihtoehtoja kulmille saat laittamalla jotain korokkeeksi tason alaosaan eli siihen päähän, jossa pehmuste on. Tallenna jokainen onnistunut mittaus ennen seuraavaa mittausta (Ctrl+L). Kirjaa vastauslomakkeeseen myös käyttämäsi kappale.
8. Näytä lopuksi tulokset assistentille. Tallenna Logger Pro -tiedosto tulosten myöhempää tarkastelua varten. Käytä tallennukseen Opiskelijat-verkkolevyä.

5.3 Vierimis- ja liukumisehdon tutkiminen

Tarkastellaan seuraavaksi **umpinaisen muovisylinterin** vierimis-/liukumisehtoa.

1. **Tee hypoteesi:** Millä kulmalla muovisylinteri lähtee vierimisen sijaan liukumaan alas tasoa? Kyseinen muovikappale sekä taso ovat polyasetaalia, jonka lepokitkakerroin on suunnilleen 0,2. Entä jos kappale laitetaankin “lappeelleen” eli tasainen sivu vasten tasoa, jolloin kappale ei voi vieriä? Millä kulmalla se lähtee liukumaan siinä tapauksessa? Perustele vastauksesi fysiikan avulla.
2. **Testaa tekemääsi hypoteesia:** Vaihtele kulmaa ja kokeile, millä kulmalla kappale ei enää vieri alas tasoa vaan lähtee liukumaan. Älä päästä kappaleesta irti vaan pidä sormilla kevyesti kiinni kappaleen keskeltä molemmilta tasaisilta sivuilta. Näin pystyt tuntemaan, kun kappale lähtisi liukumaan vierimisen sijaan. Vaihda kappaleen asentoa niin, että sen tasainen sivu on vasten tasoa ja kokeile, millä kulmalla se lähtee siinä tapauksessa liukumaan. Kulmia on vaikea määrittää tarkasti, mutta karkea arvio riittää. Vastaavatko tulokset tekemääsi hypoteesia? Jos eivät, pohdi miksi.

6 Tulosten käsittely

Kirjoita tulokset vastauslomakkeeseen. Liitä mahdolliset erilliselle paperille tekemäsi laskut, sekä kuvaajat vastauslomakkeeseen.

6.1 Kiihtyvyden riippuvuus kallistuskulmasta

1. Määritä kaikista mittauksista kappaleen kiihtyvyys a (kuvaajan tasaiselta osalta ennen törmäystä tason päässä olevaan esteeseen) ja kirjaa ne vastauslomakkeeseen.

   Ohje: Voit määrittää kiihtyvyyden joko silmämääräisesti datasta katsomalla tai määrittämällä sopivalta alueelta keskiarvon (Logger Prossa: Analyze → Statistics).

2. Piirrä kappaleen kiihtyvyys kallistuskulman sinin funktiona. Sovita kuvaajaan suora ja määritä sen kulmakerroin virherajoineen.
3. Tulosta piirtämäsi kuvaaja vastauslomakkeen liitteeksi.

7 Pohdittavaa

1. Minkälaisia virhelähteitä työssä esiintyy?
2. Vertaa kohdassa 6.1 sovittamasi suoran kulmakerrointa teoriaan. Vastaavatko tulokset toisiaan? Miten saamasi kulmakerroin liittyy teorian mukaan putoamiskiihtyvyyteen?

Lähteet

[1] D.C. Giancoli, Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics 4th edition, International edition, Pearson Education, Inc, 2009.
[2] Hugh Young, Roger Freedman, A. Lewis Ford: University Physics with Modern Physics. International Edition. 13. painos. Pearson Education, 2011.
[3] Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics Extended, Extended 9th edition, International Student Version, Wiley & Sons, Inc., 2011.