PALKIN TAIVUTUS

1 Johdanto

Jos homogeenista tasapaksua palkkia venytetään palkin suuntaisella voimalla *F*, on jännitys σ mielivaltaisella etäisyydellä tukipisteestä

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{1}$$

missä *S* on palkin poikkileikkauksen pinta-ala. Jos voima *F* etäisyydellä l_0 aiheuttaa venymän Δl, on suhteellinen venymä

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{2}$$

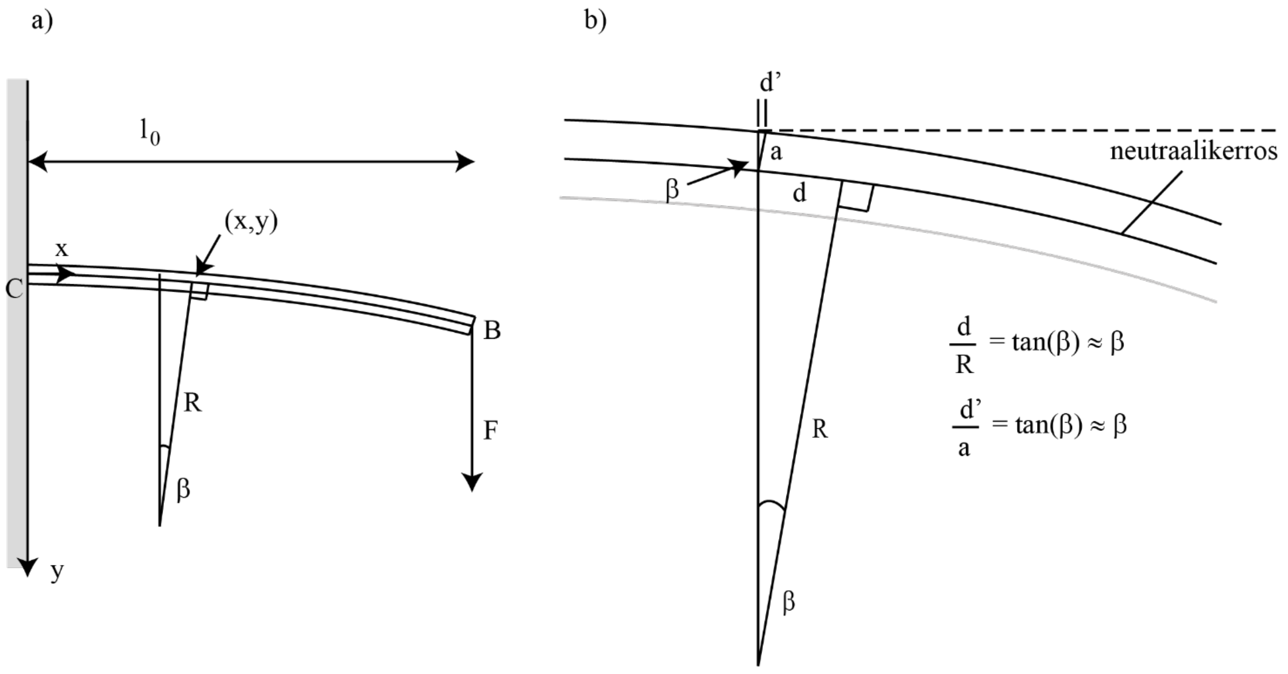
Aineen kimmokerroin määritellään jännityksen ja suhteellisen venymän välisenä suhteena

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Palkin venymälle Δl pätee

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F}{S} l_0, \tag{4}$$

joten kimmokerroin voidaan määrittää jännittämällä palkkia tunnetulla voimalla *F* ja mittaamalla venymä. Näin saadut venymät ovat kuitenkin pieniä, joten tässä laboratoriotyössä kimmokerroin määritetään taivuttamalla.



Kuva 1. *a) Palkin taivutus, b) palkin venymän arvioiminen taipumiskulman avulla.*

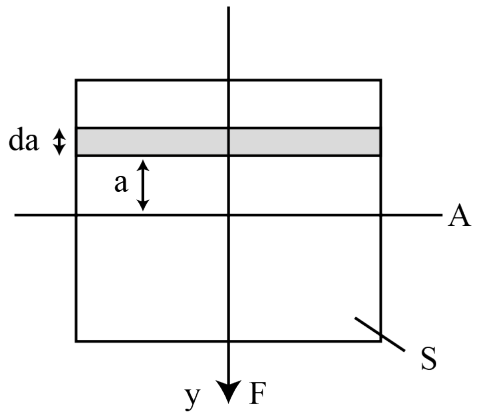
Oletetaan, että palkin, jonka pituus on l_0, toinen pää on kiinnitetty seinään ja toista kuormitetaan voimalla *F* (kuva 1a). Oletetaan edelleen, että palkin poikkipinta-ala *S* on vakio ja symmetrinen sen tason suhteen, jossa kuormitus tapahtuu (kuva 2), ja että palkin oma massa on pieni suhteessa kuormittavaan voimaan. Palkin taipuessa sen ylemmät kerrokset venyvät ja alemmat kerrokset puristuvat kokoon. Palkin keskellä kulkee kerros, joka ei veny lainkaan. Kuvassa 1a tämä ns. neutraalikerros on CB. Voidaan lisäksi osoittaa, että tasapainossa neutraalikerros kulkee poikkileikkauksen painopisteen kautta (koska poikkileikkaustasoon vaikuttava kokonaisvoima on nolla).

Tarkastellaan sitten palkin neutraalikerroksen mielivaltaisesta pisteestä etäisyydellä *a* sijaitsevaa kerrosta (kuva 1b). Jos neutraalikerroksen kaarevuussäde tässä pisteessä on *R*, etäisyydellä *a* sijaitsevan kerroksen *d*:n pituisen osan suhteelliseksi venymäksi saadaan kuvan 1b avulla

$$\varepsilon = \frac{d\prime}{d} = \frac{a}{R}, \tag{5}$$

kun oletetaan, että palkin poikkileikkaustasot pysyvät tasoina palkkia taivutettaessa. Venymää *ε* vastaava normaalijännitys on kaavan (3) perusteella

$$\sigma = E\,\frac{a}{R}. \tag{6}$$



Kuva 2. *Palkin poikkileikkaus etäisyydellä x palkin kiinnityspisteestä.*

Etäisyydellä *a* olevan kerroksen jännityksestä aiheutuu taivutusmomentti

$$d\mathrm{M} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{dF} = \mathrm{a}\sigma dS \tag{7}$$

pisteen *x* kautta kulkevan akselin suhteen (kuvassa 1 kohtisuorassa paperin tasoa vastaan ja kuvassa 2 merkitty A:lla). Koko palkin jännityksestä aiheutuva taivutusmomentti akselin A suhteen saadaan integroimalla palkin poikkipinta-alan yli

$$M(x) = \int \quad dM = \int_S \ \sigma a dS = \frac{E}{R(x)} \int_S \ a^2\, dS = \frac{E}{R(x)} I_S. \tag{8}$$

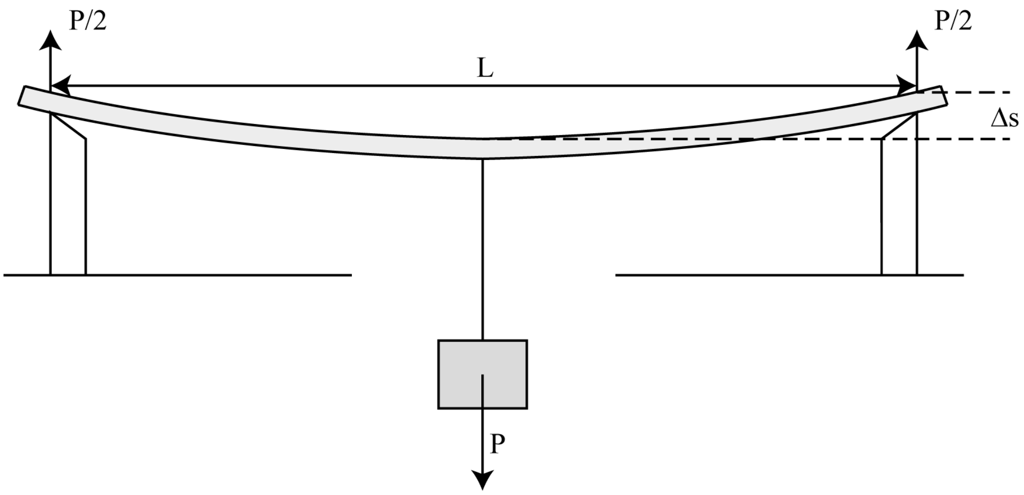
Integraali

$$I_S = \int_S \ a^2\, dS \tag{9}$$

on poikkileikkauspinnan jäyhyysmomentti eli pintahitausmomentti pinnassa painopisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Jäyhyysmomentin I_S arvo riippuu pinnan S muodosta ja siitä, minkä akselin suhteen se lasketaan.

Palkin kaarevuussäde vaihtelee palkin eri kohdissa. Kaarevuuden perusteella voidaan johtaa palkin taipumaksi etäisyydellä l_0 [1]

$$y(l_0) = \frac{F}{EI_S}\frac{l_0^3}{3}. \tag{10}$$



Kuva 3. *Mittausgeometria palkin taivutuksessa.*

Laboratoriotyössä tutkittava palkki on kahden etäisyydellä L olevan tuen varassa (Kuva 3). Palkkia kuormitetaan keskeltä voimalla P. Tuet aiheuttavat palkin kumpaankin päähän tukivoiman $P/2$. Palkin taipumisen kannalta tällainen tilanne on samanlainen kuin, jos palkki olisi kiinnitetty keskeltä ja voimat $P/2$ taivuttaisivat palkkia ylöspäin etäisyydellä $L/2$ kiinnityspisteestä.

Yllä rakennetun mallin mukaan kuormituksen P aiheuttaman poikkeaman itseisarvo Δs voidaan laskea yhtälöstä (10) asettamalla $F=P/2$ ja $l_o=L/2$, jolloin

$$\Delta s = \frac{L^3}{48EI_S}P\,. \tag{11}$$

Työssä poikkeama Δs mitataan usealla eri kuormituksen P arvolla. Jos voiman P ja poikkeaman Δs välinen riippuvuus on lineaarinen, voidaan kimmokerroin E määrittää esim. graafisesti. Palkin painon vaikutusta ei tarvitse tuntea, sillä painon aiheuttama poikkeama merkitsee vain lisättävää vakiota yhtälössä (11).

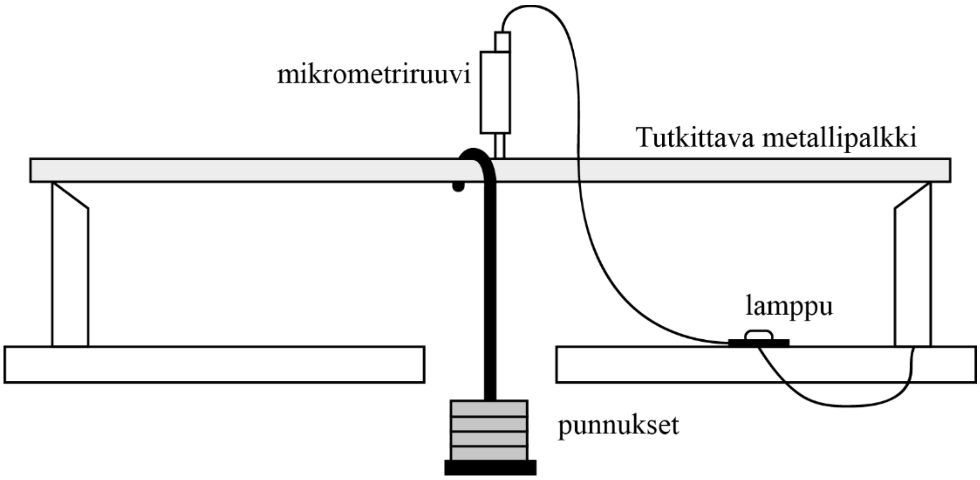
2 Tavoitteet

Laboratoriotyön tehtyään opiskelija

- osaa selittää, miten palkin poikkileikkauksen muoto vaikuttaa palkin taipumiseen
- osaa selittää, mitä kimmokertoimella tarkoitetaan
- osaa määrittää yksinkertaisen palkin jäyhyysmomentin eli pintahitausmomentin
- on harjoitellut mittaustulosten esittämistä kuvaajan avulla ja suoran sovittamista pisteistöön

3 Laitteisto

Tässä työssä palkin taipumista tutkitaan kuvassa (4) kuvatulla mittausjärjestelyllä, jossa noin metrin mittainen palkki tuetaan päistään siirrettävien tukien avulla. Päistään tuetun palkin keskelle ripustetaan pidike, johon voidaan kiinnittää punnuksia. Punnusten avulla palkkiin kohdistuvaa kuormitusta voidaan muuttaa. Mittauslaitteistoon on kiinnitetty mikrometriruuvi, jonka avulla palkin taipuma mitataan. Mikrometriruuvin koskiessa mittalaitteistoa se sulkee sähköisen virtapiirin ja sytyttää lampun. Lampun syttymisen avulla saadaan selvitettyä palkin ja mikrometriruuvin kosketuskohta tarkasti. Mittalaitteiston lisäksi tarvitaan metrimitta palkin tukipisteiden välisen etäisyyden määrittämiseen sekä työntömitta palkin poikkileikkauksen mittojen määrittämiseen. Nämä työkalut saat assistentilta.



Kuva 4. *Työssä käytettävä mittauslaitteisto.*

4 Esitehtävät

Tutustu työhön liittyvään teoriaan haluamastasi fysiikan oppikirjasta esim. [2–4], lue työohje läpi ja vastaa alla oleviin kysymyksiin vastauslomakkeeseen.

1. Mitä taivutuspalkin neutraalikerroksella tarkoitetaan?
2. Selitä, mikä on jäyhyysmomentti ja johda jäyhyysmomentin lauseke suorakulmaiselle palkille.
3. Työssä mitataan ja piirretään palkin taipuma Δs kuormituksen P funktiona sekä sovitetaan tähän suora ($y = kx + b$). Mikä on yhtälön (11) mukaan tämän suoran kulmakerroin k? Anna yhtälö k:lle ja ratkaise siitä kimmokerroin E.
4. Määritä kokonaisdifferentiaalilla virhearvio kimmokertoimelle E edellisessä kohdassa saamastasi yhtälöstä. Ota muuttujista huomioon kulmakerroin k, jäyhyysmomentti I_s sekä tukipisteiden etäisyys L. (Vinkki: Tässä tapauksessa suhteellinen virhe on helpompi laskea)

5 Mittaukset

Kaikki mittaustulokset ja kysymysten vastaukset kirjataan vastauslomakkeelle, joita saa assistentilta. On suositeltavaa käyttää lyijykynää. Vastauslomake palautetaan lopuksi assistentille.

1. Punnitse massat ja pidike vaa'alla. Huomaa, että punnusten massat eivät ole yhtä suuria! Merkitse massat ja punnusten numerot vastauslomakkeeseen.
2. Merkitse muistiin suorakaiteen muotoisen palkin leveys ja korkeus. Käytä mittaamiseen työntömittaa. Arvioi mittauksen virhettä toistamalla mittaus muutaman kerran palkin eri kohdista. Kirjaa tulokset vastauslomakkeeseen.
3. Aseta tutkittava palkki tukipisteiden päälle. Varmista laitteiston toiminta tarkistamalla, että lamppu syttyy mikrometriruuvin osuessa tutkittavaan palkkiin.
4. Mittaa palkin tukipisteiden välinen etäisyys ja merkitse se vastauslomakkeeseen virhearvioineen.
5. **Tee hypoteesi ja kirjaa se vastauslomakkeeseen:** Kummassa asennossa (▭ vai ▯) poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoinen palkki taipuu enemmän? Perustele vastauksesi fysiikan avulla.
6. **Ennen varsinaista mittausta:** Testaa tekemääsi hypoteesia ja kirjoita tekemäsi havainnot ja päätelmät vastauslomakkeelle. Jos havaintosi poikkesivat hypoteesista, niin pohdi miksi.
7. Aseta palkki nyt tukipisteiden päälle siten, että palkin poikkileikkauspinnan pidempi sivu on vaaka-asennossa.
8. Aseta punnusten pidike palkkiin roikkumaan mahdollisimman lähelle tukipisteiden puoliväliä. Tarkista pidikkeen sijainti metrimitan avulla.
9. Etsi sellainen mikrometriruuvin asetus, jolla lamppu juuri ja juuri syttyy, ja merkitse lukema ylös. Huomaa, että mikrometriruuvin tulee olla mahdollisimman keskellä palkkia. Merkitse mikrometriruuvin lukema vastauslomakkeeseen.
10. Lisää punnuksia yksitellen, kunnes kaikki kymmenen punnusta ovat kannattimessa, ja mittaa palkin taipuma jokaisella taivuttavan voiman arvolla. Merkitse tulokset vastauslomakkeen taulukkoon. Tämän jälkeen poista punnuksia yksitellen ja mittaa jälleen taipuma jokaisella kuormalla. Muista löysätä mikrometriruuvia ennen jokaisen punnuksen poistamista, jotta mikrometriruuvi ei kuormitu turhaan!

6 Tulosten käsittely

1. Määritä palkin leveys ja korkeus keskiarvona mittaamistasi tuloksista. Määritä myös virherajat näille esim. vaihteluvälistä.
2. Tutki mittaustuloksista, palautuuko palkki. Laske kullakin painolla taipuma keskiarvona punnuksia lisättäessä ja vähennettäessä mitatuista taipumista ja merkitse tulokset vastauslomakkeeseen.
3. Piirrä taipuma Δs kuormituksen P funktiona. Yhtälön (11) mukaan pisteiden tulisi osua suoralle.
4. Sovita pisteistöön suora ja määritä sen kulmakerroin ja kulmakertoimelle virherajat.
5. Tulosta piirtämäsi kuvaaja vastauslomakkeen liitteeksi.
6. Laske jäyhyysmomentti virheineen mittauksessa käytetylle konfiguraatiolle.
7. Laske jäyhyysmomentin ja kulmakertoimen avulla materiaalille kimmokerroin E ja määritä sille virhearvio ΔE. Merkitse tulokset lomakkeeseen.

7 Pohdittavaa

1. Selitä yleisellä tasolla, miten kappaleen muoto vaikuttaa sen taipumiseen. Miksi rakentamisessa käytetään paljon ns. I- ja H-palkkeja?
2. Arvioi, mitkä virhelähteet ovat vaikutukseltaan suurimpia käytetyssä mittausjärjestelyssä.
3. Taivutettava palkki on tehty alumiinista. Vertaa saamaasi tulosta kimmokertoimelle kirjallisuuteen. Osuuko kirjallisuusarvo virherajoihin?

Lähteet

[1] E. Pennala, Lujuusopin perusteet, 9. painos, Otatieto 1994.

[2] D.C. Giancoli, Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics 4th edition, International edition, Pearson Education, Inc, 2009.

[3] Hugh Young, Roger Freedman, A. Lewis Ford: University Physics with Modern Physics. International Edition. 13. painos. Pearson Education, 2011.

[4] Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics Extended, Extended 9th edition, International Student Version, Wiley & Sons, Inc., 2011.