

# BÖJNING AV EN STAV

## 1 Inledning

Då en homogen jämntjock stav töjs med en kraft  $F$  i stavens riktning, beskrivs spänningen  $\sigma$  på ett godtyckligt avstånd från stödpunkten som

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

där  $A$  är stavens tvärsnittsytta. Ifall kraften  $F$  på ett avstånd  $l_0$  orsakar töjningen  $\Delta l$ , kan den relativa töjningen beräknas som

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2)$$

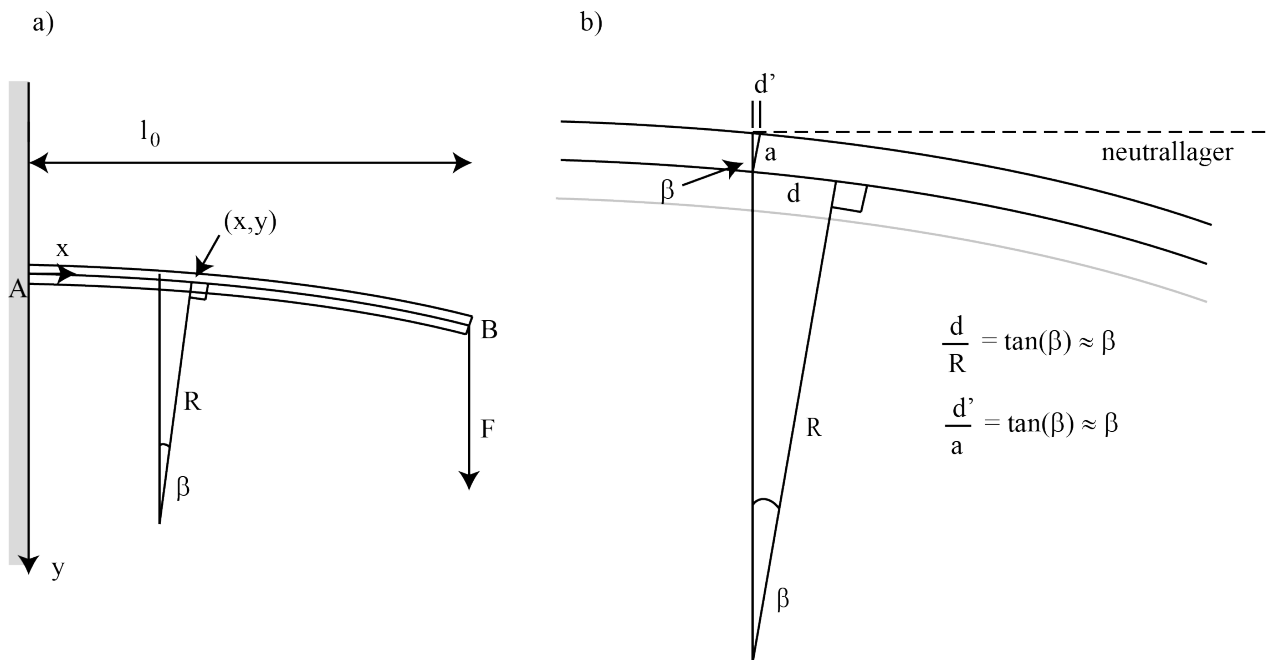
Materialets elasticitetsmodul definieras som förhållandet mellan spänningen och den relativa töjningen

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3)$$

För stavens töjning  $\Delta l$  gäller att

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F}{A} l_0. \quad (4)$$

Elasticitetsmodulen kan således bestämmas genom att påverka staven med en känd kraft  $F$  och mäta stavens töjning. Kraften ger dock upphov till förhållandevis små töjningar, därför bestäms elasticitetsmodulen i detta laboratoriearbete genom att böja staven.



**Figur 1.** a) Böjning av staven, b) uppskattning av stavens töjning med hjälp av böjningsvinkeln.

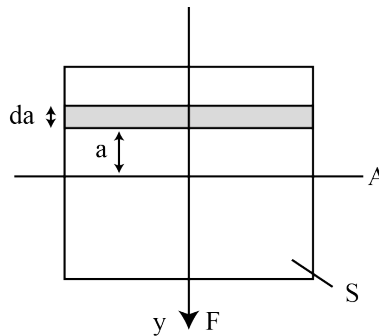
Antag att ena ändan av en stav med längd  $l_0$  är fäst, medan den andra belastas av en kraft  $F$  (figur 1a). Vidare antag att stavens tvärsnittsytta  $S$  är konstant för hela längden på staven och symmetrisk i förhållande till det plan i vilken belastningen sker (bild 2) och att stavens tyngd är liten i förhållande till den belastande kraften. Då staven böjs, töjs de övre lagren ut medan de undre lagren pressas ihop. Lagret mitt i staven töjs ej. I figur 1a är detta det s.k. neutrallagret AB. Vidare kan det visas att neutrallagret vid jämvikt går genom tvärsnittets tyngdpunkt (då summan av krafterna som påverkar tvärsnittsplanet är noll).

Låt oss betrakta ett lager i staven på ett godtyckligt avstånd  $a$  från neutrallagret (figur 1b). Om neutrallagrets krökningsradie i denna punkt är  $R$ , fås den relativa töjningen för lagret med en längd  $d$  på avståndet  $a$  med hjälp av figur 1b

$$\varepsilon = \frac{d'}{d} = \frac{a}{R} \quad (5)$$

då det antas att stavens tvärsnittsytor förblir plana då staven böjs. Spänningen som motsvarar töjningen  $\varepsilon$  är enligt ekvation (3)

$$\sigma = E \frac{a}{R} \quad (6)$$



**Figur 2.** Stavens tvärsnitt på avstånd  $x$  från stavens fästpunkt.

Kraftmomentet genom axeln genom punkt  $x$  p.g.a. spänningen på lagret på avståndet  $a$

$$dM = a \cdot dF = a\sigma dS \quad (7)$$

(axeln är vinkelrät mot papprets plan i figur 1 och märkt i med A i figur 2). I jämvikt fås kraftmomentet kring axeln A genom att integrera över stavens tvärsnitt

$$M(x) = \int dM = \int_S \sigma a dS = \frac{E}{R(x)} \int_S a^2 dS = \frac{E}{R(x)} I_S \quad (8)$$

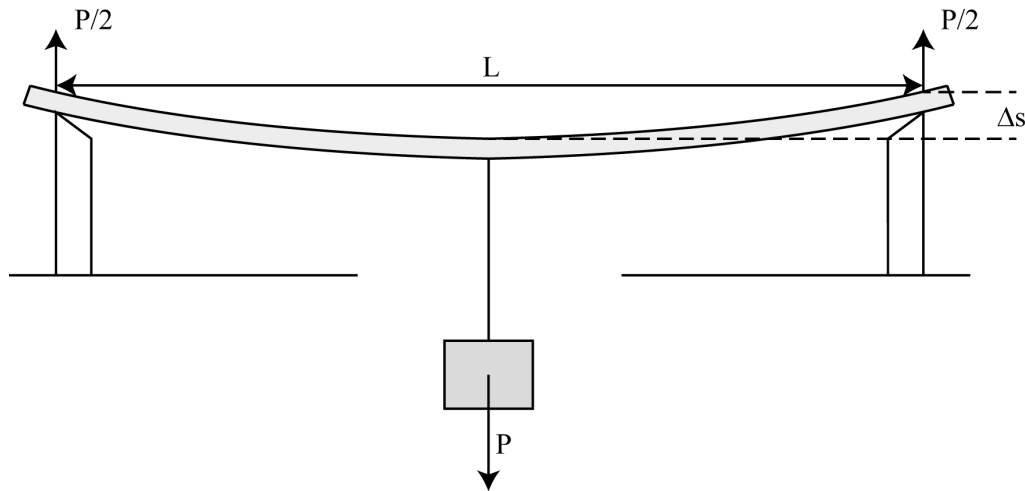
Integralen

$$I_S = \int_S a^2 dS \quad (9)$$

är tvärsnittsyntans böjtröghetsmoment, d.v.s. yttröghetsmomentet vid ytan i förhållande till axeln genom tyngdpunkten. Värdet på det axiala böjtröghetsmomentets  $I_S$  beror på formen på ytan  $S$  och på axelns läge.

Stavens krökningsradie varierar i olika punkter på staven. På basis av krökningen fås för böjningen på staven vid  $l_0$  [1]

$$y(l_0) = \frac{F l_0^3}{EI_S 3}. \quad (10)$$



**Figur 3.** Mätgeometrin vid stavens krökning.

Staven som undersöks i laboratoriearbetet balanseras på två stöd på avståndet  $S$  från varandra (Figur 3). Staven belastas i mitten med kraften  $P$ . Bägge stöd orsakar en kraft  $P/2$  vid stavens ändor. Det går lika bra att föreställa sig att staven är fäst vid belastningspunkten och att krafterna  $P/2$  böjer staven uppåt på avståndet  $s/2$  från fästpunkten.

Ifall spänningar i tvärsnittets riktning ej beaktas, kan absolutbeloppet för avvikelserna  $\Delta s$  som belastningen  $P$  orsakar beräknas genom att i ekvation (10) sätta  $F=P/2$  och  $l_0=L/2$

$$\Delta s = \frac{L^3}{48EI_S} P. \quad (11)$$

I arbetet mäts avvikelserna  $\Delta s$  för olika värden på belastningen  $P$ . Ifall förhållandet mellan kraften  $P$  och avvikelserna  $\Delta s$  är lineärt, kan elasticitetsmodulen  $E$  bestämmas t. ex. grafiskt. Stavens tyngd behöver ej vara känd då avvikelserna som tyngden orsakar endast leder till en addering av en konstant i ekvation (11).

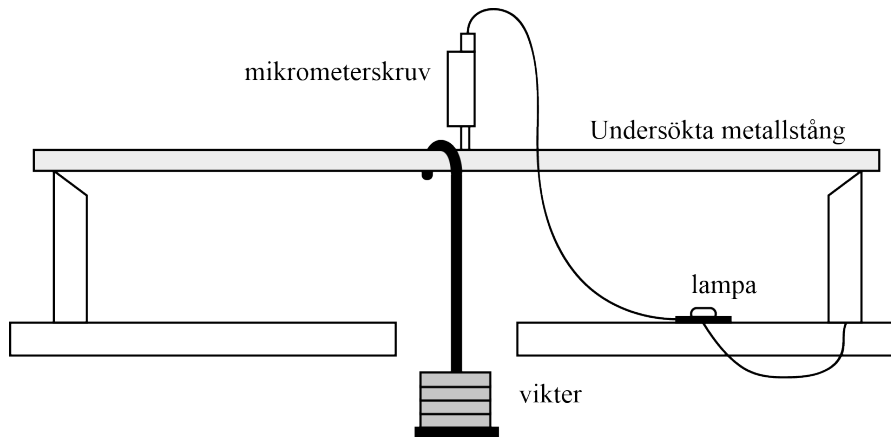
## 2 Målsättningar

Efter att ha utfört laboratoriearbetet

- kan studeranden förklara hur formen på stavens tvärsnitt påverkar staven böjning
- kan studeranden förklara vad som avses med elasticitetsmodul
- kan studeranden bestämma böjtröghetsmomentet d.v.s yttretröghetsmomentet för en enkel stav
- har studeranden övat på framställandet av mätresultaten grafiskt och anpassandet av en rak linje till mätdata

### 3 Apparatur

I detta arbete studeras en stavs böjning genom mätanordningen beskriven i figur (4) där en ca en meter lång stav stöds i ändorna med hjälp av flyttbara stöd. I mitten på staven hängs en vikthållare i vilken vikter kan fästas. Belastningen på staven justeras genom att lägga på vikter. Stavens böjning mäts med en mikrometerskruv fäst i mätapparaturen. Då mikrometerskruven rör i mätapparaturen sluts strömkretsen och en lampa tänds. Genom att lampan tänds kan stavens och mikrometerskruvens beröringspunkt bestämmas exakt. Förutom mätapparaturen behövs ett rullmått för att bestämma avståndet mellan stångens stöd samt ett skjutmått för att bestämma stavens tvärsnitt. Dessa verktyg fås av assistenten.



Figur 3. Mätutrustning som används i arbetet.

### 4 Förhandsuppgifter

Bekanta dig med teorin som hör till arbetet i valfri fysiklärobok (t.ex. [2-4]), läs igenom arbetsinstruktionen och besvara frågorna nedan på svarsblanketten.

1. Vad avses med den böjda stavens neutrallager?
2. Förklara vad som menas med böjtröghetsmoment och härled uttrycket för en rektangulär stavs böjtröghetsmoment.
3. I arbetet mäts och ritas stavens böjning  $\Delta s$  som funktion av belastningen  $P$  och en linje anpassas till resultaten ( $y = kx + b$ ). Vad är vinkelkoefficienten  $k$  för denna linje enligt ekvation (11)? Ge en ekvation för  $k$  och lös ur den elasticitetsmodulen  $E$ .
4. Bestäm med hjälp totaldifferentialen en feluppskattning för elasticitetsmodulen  $E$  från ekvation du erhöll i föregående punkt. Av variablerna bör du beakta vinkelkoefficienten  $k$ , böjtröghetsmomentet  $I_s$  samt stödpunkternas avstånd  $L$ . (Tips: I det här fallet är det lättare att beräkna det relativa felet)

### 5 Mätningar

Alla mätresultat och svaren på förhandsuppgifterna antecknas på svarsblanketten som fås av assistenten. Användning av blyertspenna rekommenderas. Svarsblanketten returneras slutligen åt assistenten.

1. Väg massorna och vikthållaren med vågen. Märk att vikternas massor är olika stora! Anteckna vikternas nummer och massor på svarsblanketten.

2. Mät med hjälp av skjutmättet den rektangulärt formade stavens bredd och tjocklek. Uppskatta mätfelet genom att upprepa mätningen ett par gånger vid olika punkter på staven. Anteckna resultaten på svarsblanketten.
3. Placera den undersökta stavens på stöden. Försäkra dig om apparaturens funktionsduglighet genom att kontrollera att lampan lyser då mikrometerskruven rör den undersökta staven.
4. Mät avstånden mellan stångens stöd och anteckna värdet på svarsblanketten.
5. **Gör en hypotes och anteckna den på svarsblanketten:** I vilken ställning ( $\square$  eller  $\square$ ) böjs staven med rektangulär tvärsnittsytta mera? Motivera ditt svar fysikaliskt.
6. **Före den egentliga mätningen:** Testa din hypotes och skriv upp dina observationer och slutsatser på svarsblanketten. Fundera på möjliga orsaker ifall hypotesen inte stämde.
7. Placera nu stången så att tvärsnittytan med den längre sidan ligger vågrätt.
8. Häng vikternas hållare mitt emellan stöden. Kontrollera behållarens läge med hjälp av rullmättet.
9. Sök en sådan inställning på mikrometerskruven där lampan just och just tänds och anteckna värdet. Märk att mikrometerskruven skall vara möjligast i mitten av staven. Anteckna mikrometerskruvens utslag på svarsblanketten.
10. Lägg på vikterna en i taget tills alla tio vikter är i hållaren och mät stavens böjning vid varje kraft som orsakar böjning. Anteckna resultaten i tabellen på svarsblanketten. Avlägsna därefter vikterna en åt gången och mät återigen böjningen vid varje belastning. Kom ihåg att lösa på mikrometerskruven före varje enskild vikt tas bort så att mikrometerskruven inte belastas i onödan.

## 6 Behandling av resultaten

1. Bestäm stavens bredd och tjocklek som ett medelvärde av de mätta resultaten. Bestäm också felgränser för dessa, t.ex. från variationsbredden.
2. Undersök med hjälp av mätresultaten om staven återhämtar sig. Beräkna för samtliga vikter böjningen som ett medelvärde av det mätta värdet då vikter lades på och togs bort och anteckna resultaten på svarsblanketten.
3. Rita böjningen  $\Delta s$  som en funktion av belastningen  $P$ . Enligt ekvation (11) skall mätpunkterna ligga på en rak linje.
4. Anpassa en rak linje till mätdata och bestäm dess vinkelkoefficient samt felmarginalen för vinkelkoefficienten.
5. Skriv ut grafen du ritat och bifoga utskriften till din svarblankett.
6. Beräkna böjtröghetsmomentet samt dess felmarginal för konfigurationen i mätningen.
7. Beräkna från böjtröghetsmomentet och vinkelkoefficienten materialets elasticitetsmodul  $E$  och bestäm dess felmarginal  $\Delta E$ . Anteckna resultaten på svarsblanketten.

## 7 Tankeställare

1. Förklara på en allmän nivå hur böjningen påverkas av kroppens form. Varför används så mycket s.k. I- och H-balkar i byggen?
2. Vilka felkällor påverkar felet för den använda mätanordningen mest?
3. Den böjbara staven är gjord av aluminium. Jämför dina resultat med värden från litteraturen för motsvarande elasticitetsmodul. Faller detta värde inom den beräknade felmarginalen?

## Källor

- [1] E. Pennala, Lujuusopin perusteet, 9. painos, Otatieto 1994.
- [2] D.C. Giancoli, Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics 4<sup>th</sup> edition, International edition, Pearson Education, Inc, 2009.
- [3] Hugh Young, Roger Freedman, A. Lewis Ford: University Physics with Modern Physics. International Edition. 13. upplagan. Pearson Education, 2011.
- [4] Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics Extended, Extended 9<sup>th</sup> edition, International Student Version, Wiley & Sons, Inc., 2011.