Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Yliopistofysiikan perusteet

Laboratoriotyöosuus

Vastaava opettaja
Jani Sainio
jani.sainio@aalto.fi
puh: 050-5756914
huone 249 (Nanotalo)

Motivaatio

- Fysiikka on havaintojen ja teorian yhdistämistä
  - tehdään kokeita
  - selitetään tulokset
  - ennustetaan tuloksia

- Mittaaminen, mittaustulosten esittäminen ja analyysi tärkeitä

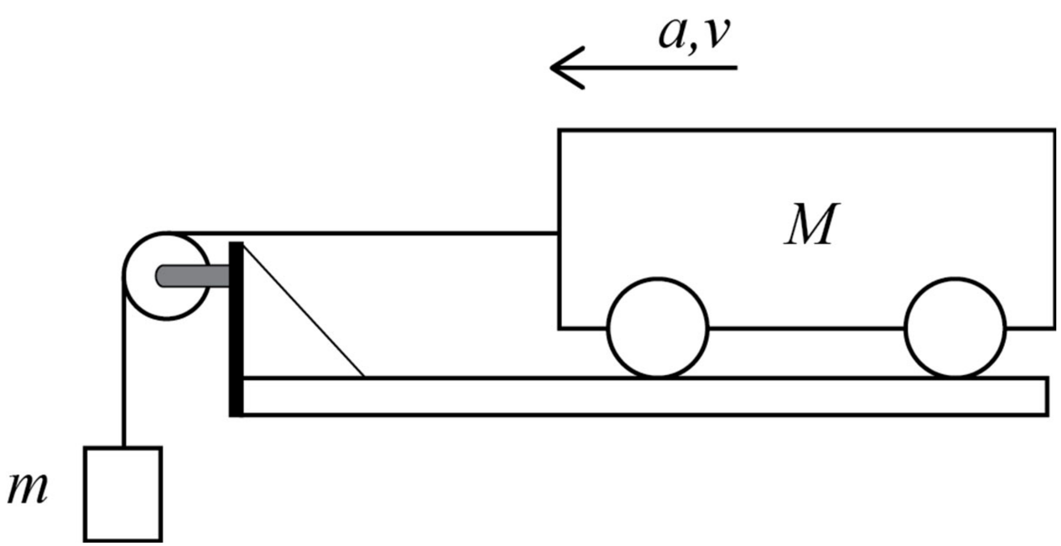
Kurssin osaamistavoitteet

Kurssin suoritettuaan opiskelija osaa:

- suorittaa fysikaalisia mittauksia ja analysoida saamiaan tuloksia
- soveltaa Newtonin lakeja kappaleen liiketilan määrittämiseen yksinkertaisissa tilanteissa myös kolmessa ulottuvuudessa
- käyttää työperiaatetta ja mekaanisen energian säilymistä tehtävien ratkaisemisessa
- ratkaista kappaleiden kimmoisia ja kimmottomia törmäyksiä
- analysoida dynamiikan tehtäviä, joissa esiintyy gravitaatio ja Coulombin voima
- nimetä sähköpiirin perussuureet ja -komponentit sekä soveltaa näitä tasavirtapiirin virtojen ja jännitteiden laskemisessa.

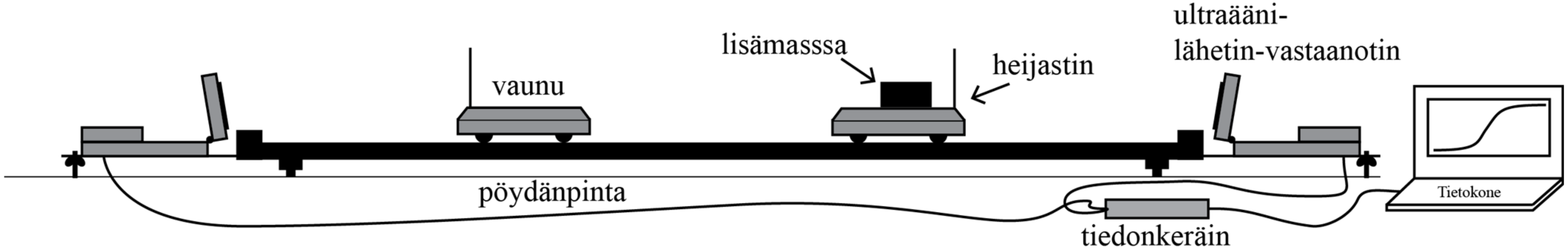
Punaisella merkityt tulevat eteen labratöissä

Laboratoriotyöt: Kiihtyvä liike



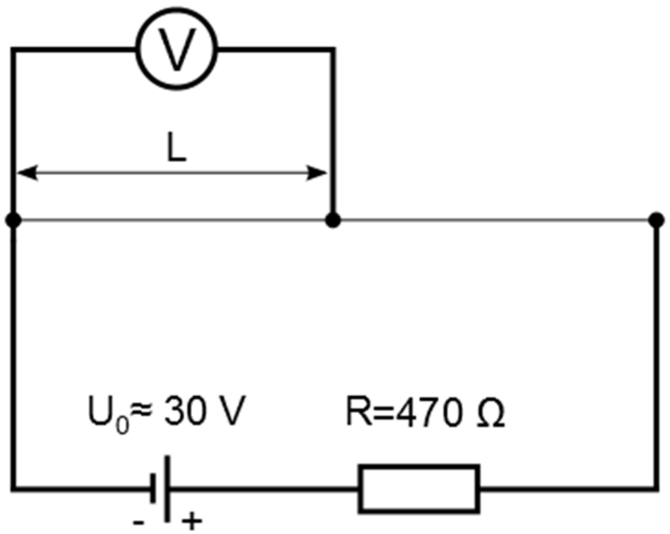
- Aina välttämätöntä ainesta:
  - Paikka, nopeus, kiihtyvyys, liikemäärä
  - Voiman käsite
  - Liikeyhtälö ja Newtonin lait

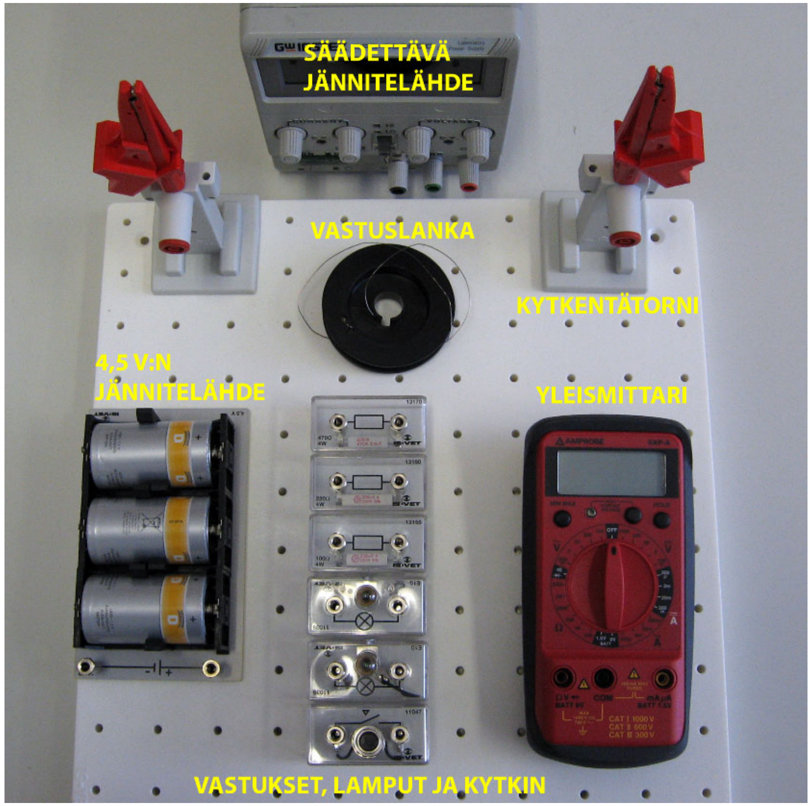
Laboratoriotyöt: Törmäykset



- Aina välttämätöntä ainesta:
  - Paikka, nopeus, kiihtyvyys, liikemäärä
  - Liikemäärän säilyminen

Laboratoriotyöt: Tasavirtapiiri





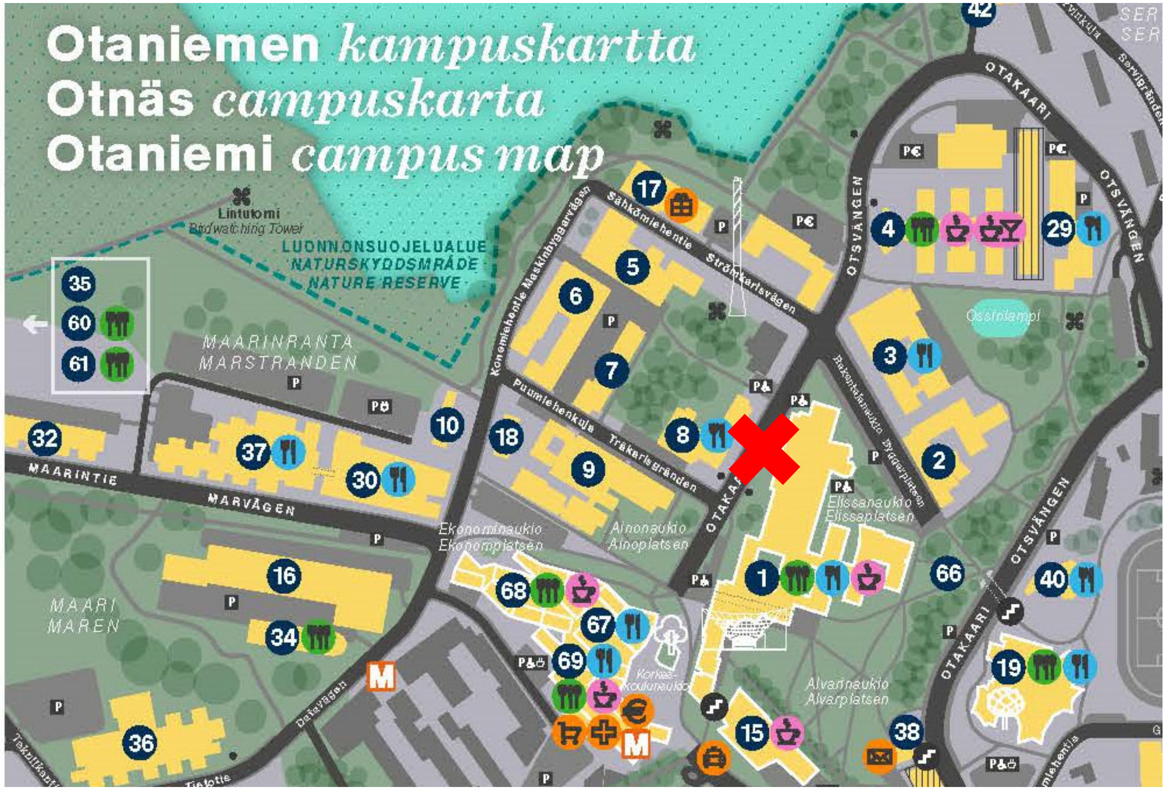
- Aina välttämätöntä ainesta:
  - Jännitelähde, johdin ja vastus tasavirtapiirissä
  - Jännite, sähkövirta ja resistanssi
  - Ohmin laki ja Kirchhoffin lait

Labratöiden järjestelyt

- Kolme lähilabratyötä viikoilla 5−7
- Labroihin ilmoittautuminen Sisussa
- Harjoittelupaketti (MyCourses), DL 6.2. kaikille

- Labratyöt tehdään pareittain
- Assistentit jakavat työt
- Vastataan vastauslomakkeelle + kuvaajat liitteeksi
- *Palautetaan viikon sisään* MC:hen (kaikki palauttaa)
- Arviointi ja palaute MC:ssä
- Analyysiin apua assareilta ja materiaalista
  - avun pyytäminen suotavaa (ei rokoteta arvostelussa)

- **Poissaolojen korvaamisesta sovittava assarin kanssa**



- Opetuslaboratorio, huone U003 (Otakaari 1)
- M-ovesta sisään, oikealle, heti raput alas kellariin ja oikealle

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Lähilabroissa

- Siirry suoraan assistentin osoittamalle paikalle
- 2 h mittausta + 1 h analyysiä (mahd. toisessa tilassa)
- Jätä lopuksi kaikki tarvikkeet pöydälle

- **Poissaolot: ota yhteyttä omaan assariin korvaavasta työstä**

Labratöiden arvostelu

Esitehtävät max 1,5 p

Tulosten analysointi max 2 p
- Analyysi (laskut yms.) max 1 p
- Kuvaajat max 0,5 p
- Virhearviointi max 0,5 p

Hypoteesit max 1 p
- Hypoteesit fysiikan avulla max 1 p (ei tarvitse olla oikein, kunhan osataan perustella jälkikäteen)

Loppupohdinnat max 0,5 p

Harjoittelupaketti 0-5 p
- Aiheet: graafisen esitys, tulosten analysointi, mittalaitteet, virhearviointi
- **Sulkeutuu labrojen toisella viikolla, ti 6.2.**

- Labrat yhteensä max (3 x 5 p) + 5 p = 20 p
- Osuus kurssin pisteistä 20 %

Kalvopaketin sisältö

- Esimerkki funktiomittauksesta
  - Graafinen esitys
  - Lineaarinen regressiomalli (+ PNS)
  - Virhearviointi

Käydään aluksi läpi

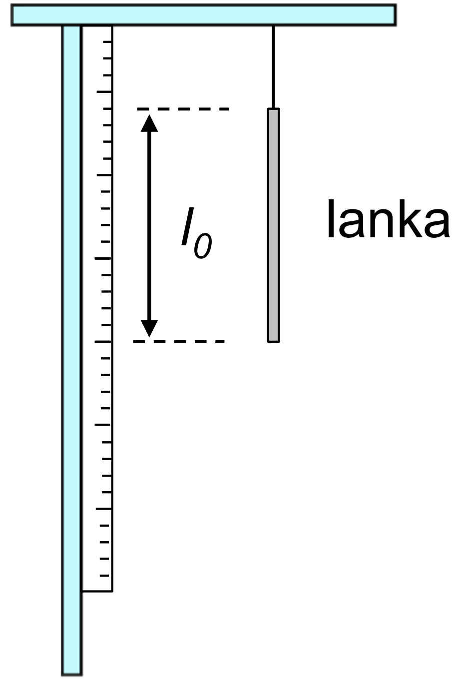
- Esimerkin asiat tarkemmin kuvattu loppupuolella

- Mittalaitteet
  - Työntömitta & Mikrometri
  - Yleismittari

Muutama esimerkki

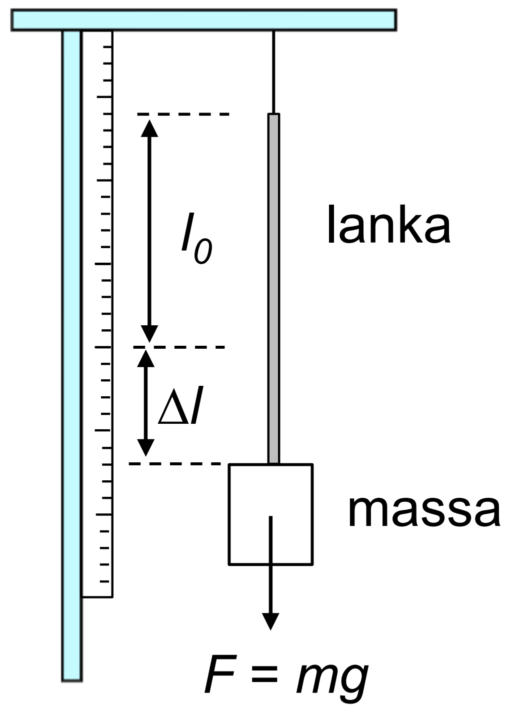
Esimerkki funktiomittauksesta

- Tutkitaan alumiinilangan (tangon) venymää voiman funktiona



Esimerkki funktiomittauksesta

- Tutkitaan alumiinilangan (tangon) venymää voiman funktiona
- Osoitetaan teorian pätevyys
- Määritetään teoriaan liittyvät parametrit: langan kimmokerroin



Esimerkki funktiomittauksesta

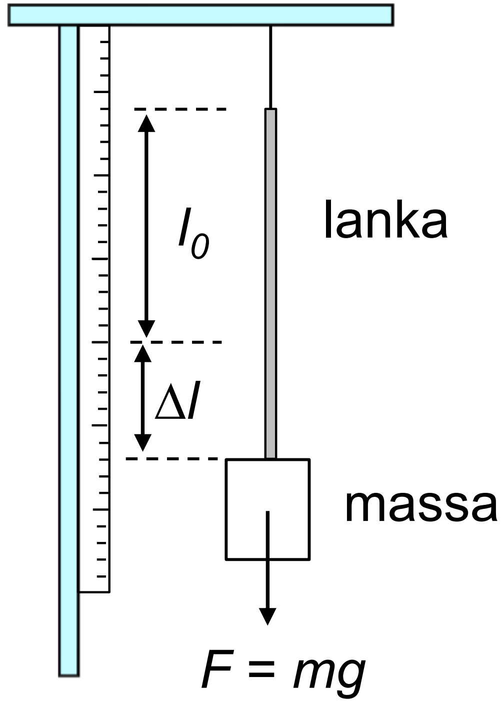
- Mitä teoria sanoo?
- Jännitys langassa on

$$\sigma = E\varepsilon,$$

jossa *E* on kimmokerroin ja ε suhteellinen venymä $\frac{\Delta l}{l_0}$

- Koska $\sigma = \frac{F}{A}$, voidaan ratkaista

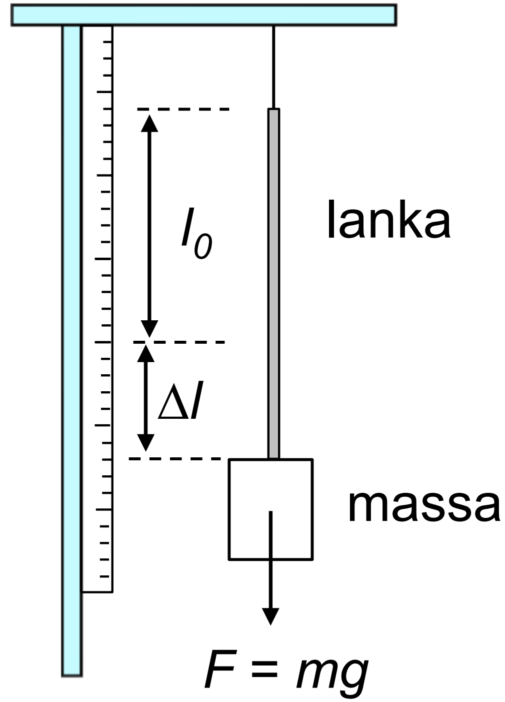
$$\Delta l = \frac{l_0}{EA} F.$$ **(lineaarinen)**



Esimerkki funktiomittauksesta

- Mitataan

F (N)	Δl (mm)
5,2	0,11
10,1	0,20
14,9	0,28
20,3	0,41
25,1	0,52

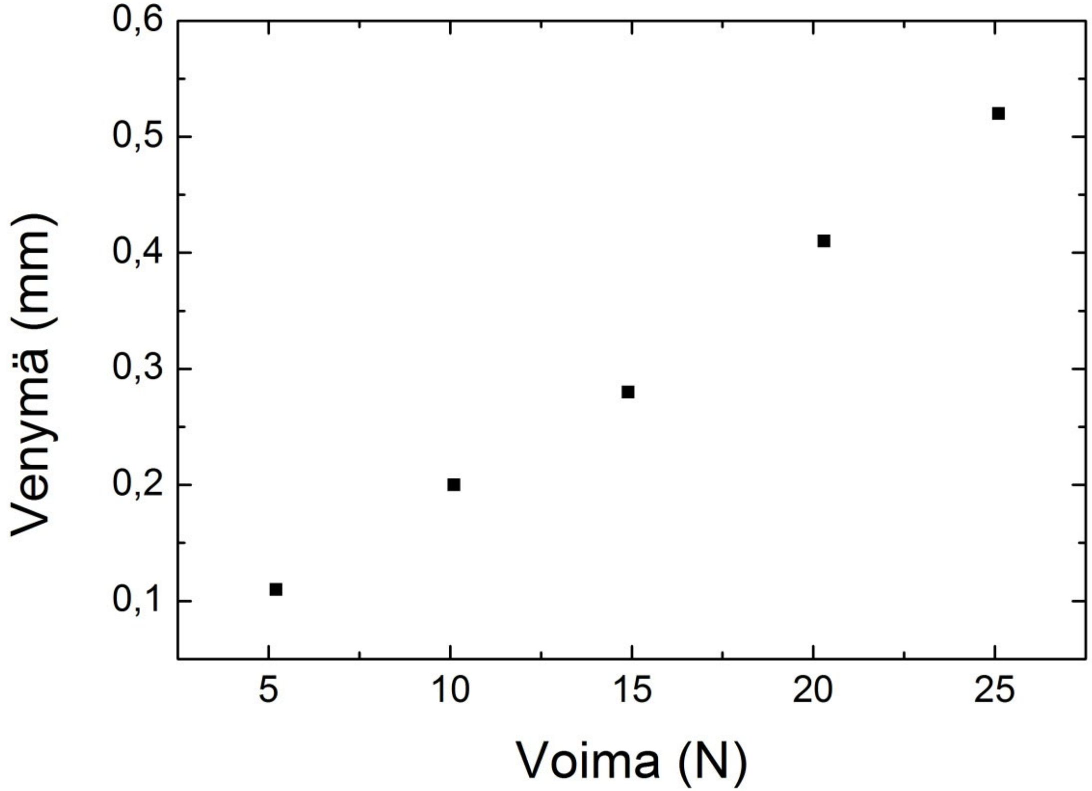


- $l_0 = (1{,}000 \pm 0{,}005)$ m
- $d = (1{,}00 \pm 0{,}05)$ mm

Esimerkki funktiomittauksesta

- Piirretään

F (N)	Δl (mm)
5,2	0,11
10,1	0,20
14,9	0,28
20,3	0,41
25,1	0,52

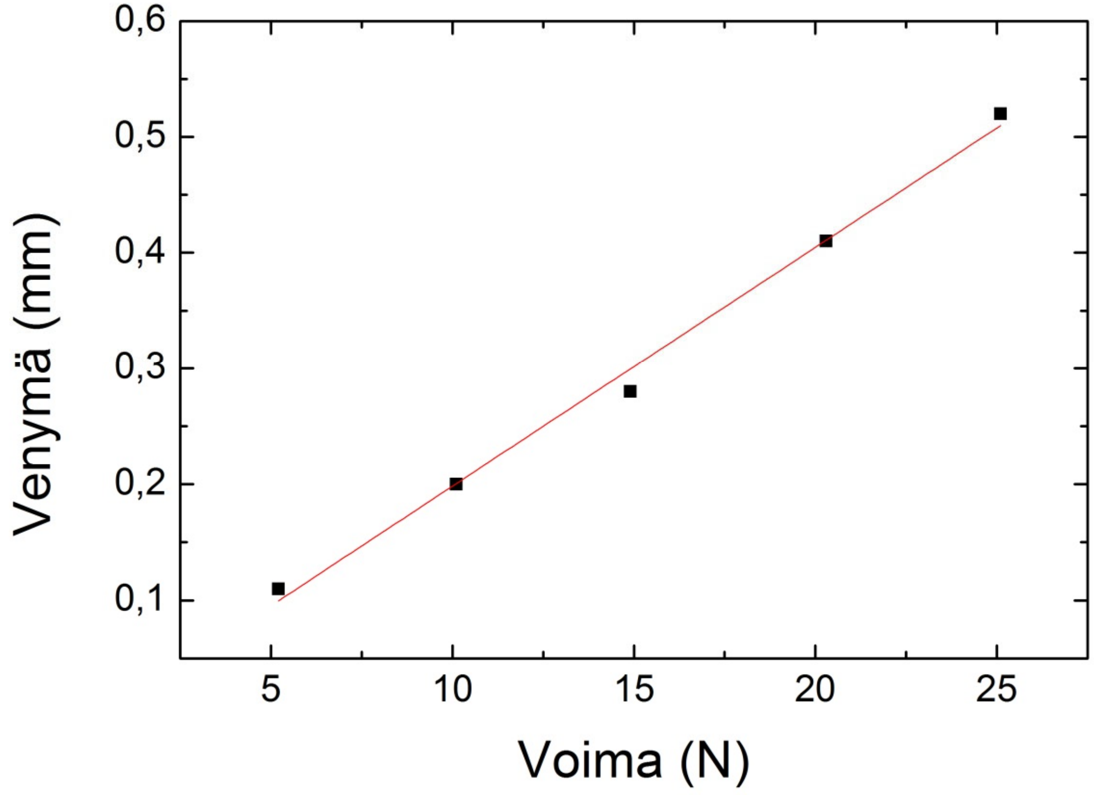


Esimerkki funktiomittauksesta

- Sovitetaan suora (lineaarinen regressio)

$$y = kx + b.$$

- Sovitus pienimmän neliösumman menetelmällä (PNS)
  - Sisäänrakennettuna esim. Excel (Trendline, Data analysis > Regression), Matlab (suora.m), Origin (Linear Fit)



Esimerkki funktiomittauksesta

- Sovituksesta kulmakerroin

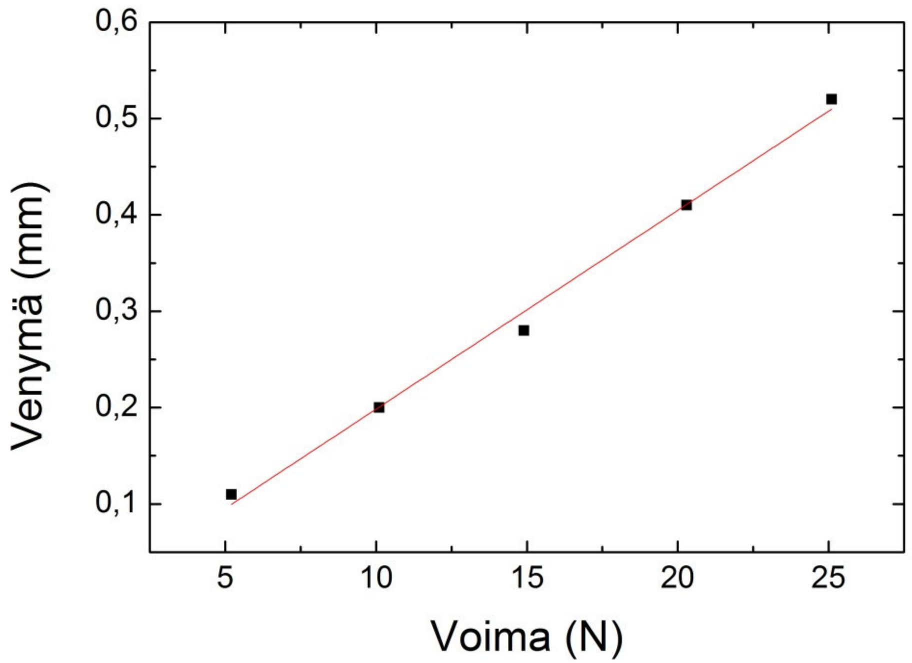
  $(k = \frac{\Delta y}{\Delta x})$

  $k \approx$ (0,0206 ± 0,0009) mm/N

  ja vakiotermi

  $b \approx$ (-0,01 ± 0,01) mm.

- PNS-menetelmä antaa myös virherajat



Esimerkki funktiomittauksesta

- Samaistetaan teoriaan:

$$\underbrace{\Delta l}_{y} = \underbrace{\frac{l_0}{EA}}_{= k} \underbrace{F}_{x}.$$

- Teorian mukaan *b* = 0
- Vakiotermi on silti hyvä aina ”sallia” (systemaattinen virhe)

Esimerkki funktiomittauksesta

- Samaistetaan teoriaan:

$$k = \frac{l_0}{EA} \Rightarrow E = \frac{l_0}{kA}$$

- Lasketaan

$$E = \frac{1{,}000\ m}{0{,}0000206\ \frac{m}{N} \cdot \pi \left(\frac{0{,}001}{2}\ m\right)^2} \approx 61{,}8 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} = 61{,}8\ GPa$$

Esimerkki funktiomittauksesta

- Virhearvio *E*:lle voidaan määrittää derivaatan avulla (kokonaisdifferentiaali)
- Lasketaan jokaisen muuttujan suhteen (osittais)derivaatta (herkkyys) ja kerrotaan virhearviolla

$$\Delta f(x_i) = \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$$

$$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial k}\right| \Delta k + \left|\frac{\partial E}{\partial l_0}\right| \Delta l_0 + \left|\frac{\partial E}{\partial d}\right| \Delta d, \qquad E = \frac{l_0}{kA} = \frac{4l_0}{k\pi d^2}$$

$$\Delta E = \left|-\frac{4l_0}{k^2\pi d^2}\right| \Delta k + \left|\frac{4}{k\pi d^2}\right| \Delta l_0 + \left|-\frac{8l_0}{k\pi d^3}\right| \Delta d$$

$$\approx 2{,}7\ GPa + 0{,}3\ GPa + 6{,}0\ Gpa\ \approx 9\ GPa.$$

Esimerkki funktiomittauksesta

- Osoittautuu, että suhteellinen virhe on huomattavasti helpompi laskea

$$E = \frac{l_0}{kA} = \frac{4l_0}{k\pi d^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \left|-\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta l_0}{l_0}\right| + \left|-2\frac{\Delta d}{d}\right|$$

$$\approx 0{,}043 + 0{,}005 + 0{,}1 = 0{,}148\ (14{,}8\ \%) \Rightarrow \Delta E \approx 9\ GPa$$

- Huomataan, että suhteellinen virhe on muuttujien suhteellisten virheiden summa kerrottuna niiden potenssien itseisarvoilla

Esimerkki funktiomittauksesta

- Lopputulos

$$E = 62 \pm 9\ GPa$$

- Virhearviosta riittää yksi merkitsevä numero

- Vertailu kirjallisuuteen [1]: *E* = 70,6 GPa

[1] Maol taulukot: matematiikka, fysiikka, kemia, K. Aronniemi (toim.), 1. painos, Otava, 1991

Esimerkki funktiomittauksesta

- Miksei lasketa pisteittäin?
  - Karkeat virheet jää huomaamatta
  - Vakiotermi (systemaattinen virhe) voi vääristää
- Vertailua voi tehdä myös
  - Sovittamalla jotain muuta funktiota kuin suoraa
  - Laskemalla teorian mukaisen käyrän ja piirtämällä sen yhdessä mittaustulosten kanssa (parametrit tällöin tiedossa)

Esimerkki virheen laskemisesta

Eräs funktio *f* noudattaa riippuvuutta

$$f = abc^{-2}$$

Jos a = 10 $\pm$ 1 ; b = 10 $\pm$ 1 ja c = 10 $\pm$ 1 , niin mikä muuttujista aiheuttaa funktion *f* arvoon suurimman virheen kokonaisdifferentiaalilla (suhteellisena virheenä) laskettuna?

a) a

b) b

c) c

d) kaikki yhtä suuren

Esimerkki virheen laskemisesta

Eräs funktio *f* noudattaa riippuvuutta

$$f = abc^{-2}$$

Jos a = 10 $\pm$ 1 ; b = 10 $\pm$ 1 ja c = 10 $\pm$ 1 , niin mikä muuttujista aiheuttaa funktion *f* arvoon suurimman virheen kokonaisdifferentiaalilla (suhteellisena virheenä) laskettuna?

a) a

b) b

c) c

d) kaikki yhtä suuren

c) on oikein sillä:

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|-\mathbf{2}\frac{\Delta c}{c}\right| = 0{,}1 + 0{,}1 + \mathbf{0{,}2} = 0{,}4$$

Mitä pitäisi jäädä käteen?

- Hyvän graafisen esityksen laadinta
- Funktiomittaus
  - Kulmakertoimen hyödyntäminen
  - Sovittaminen
- Virhearviointi
  - Suhteellisen virheen laskeminen

Mittalaitteiden käyttö

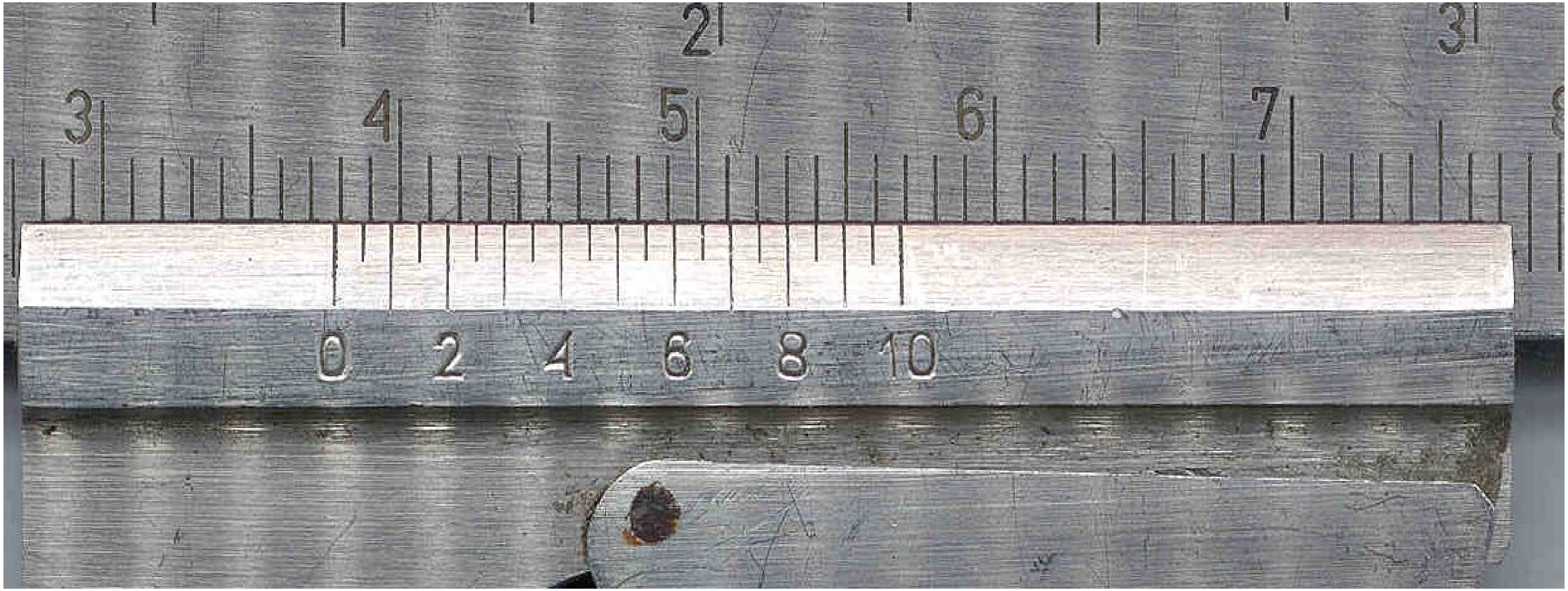
Mekaaniset mittaukset

- Työntömitta
- Mikrometriruuvi

Sähköiset mittaukset

- Yleismittari

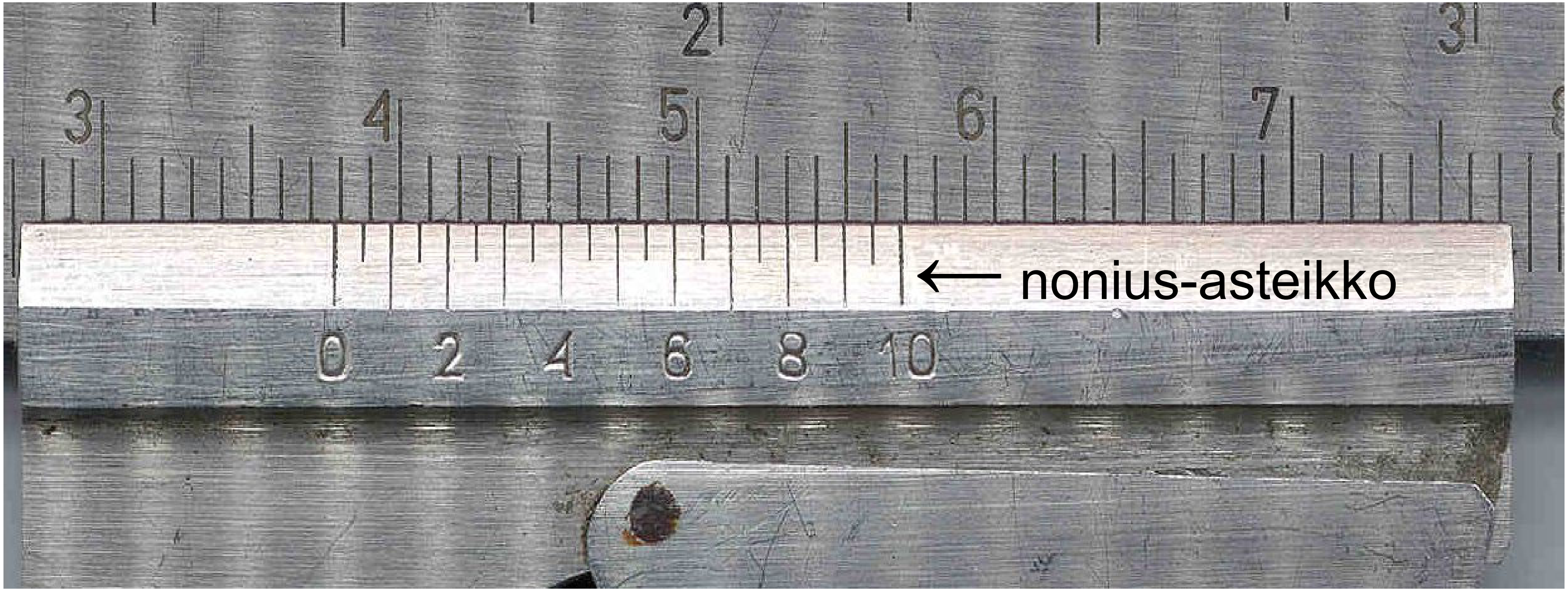
Työntömitta



Lukema on a) 28,80 mm c) 38,00 mm

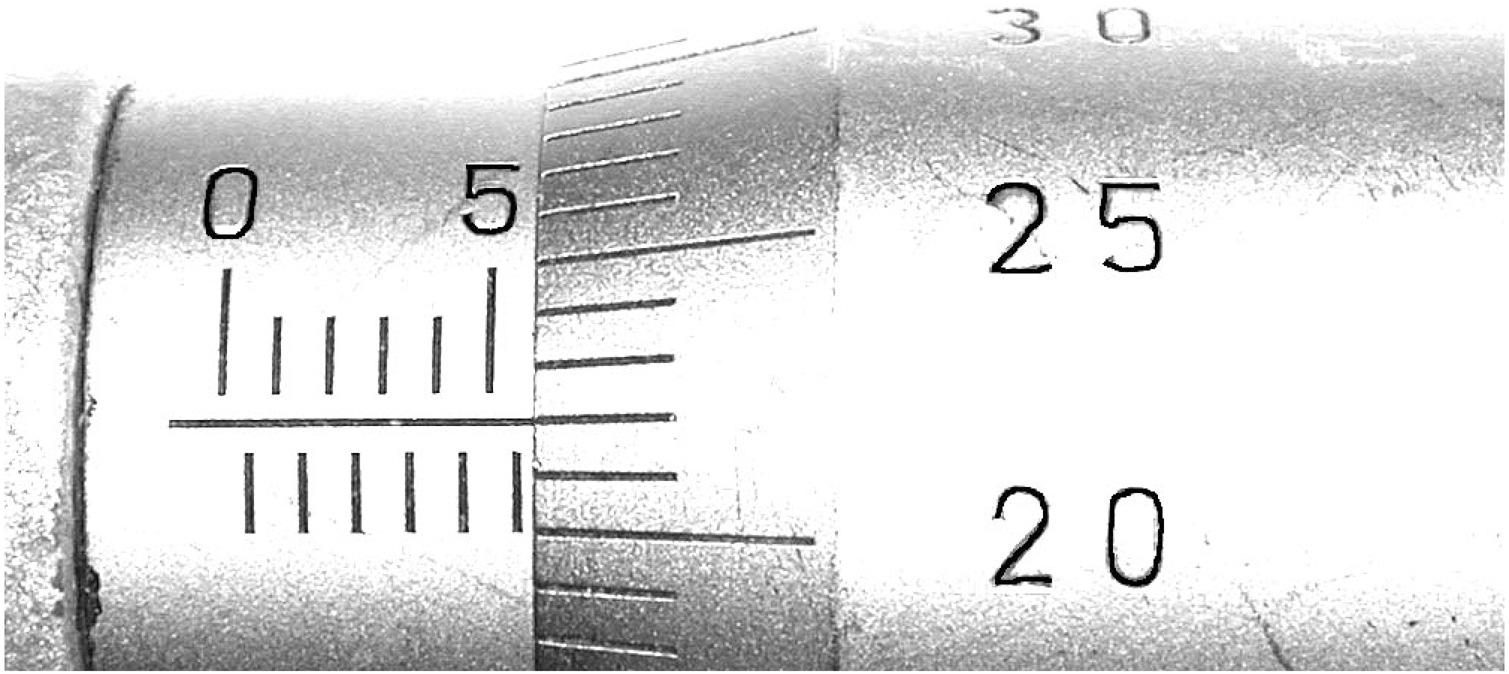
b) 37,80 mm d) 56,80 mm

Työntömitta



- Kokonaiset millimetrit nonius-asteikon nollan kohdalta
- Millimetrin osat: vasemmalta katsoen ensimmäinen nonius-asteikon viiva, joka kohdakkain yläasteikon viivan kanssa
- Esimerkin lukema 37,80 mm

Mikrometriruuvi



Lukema on

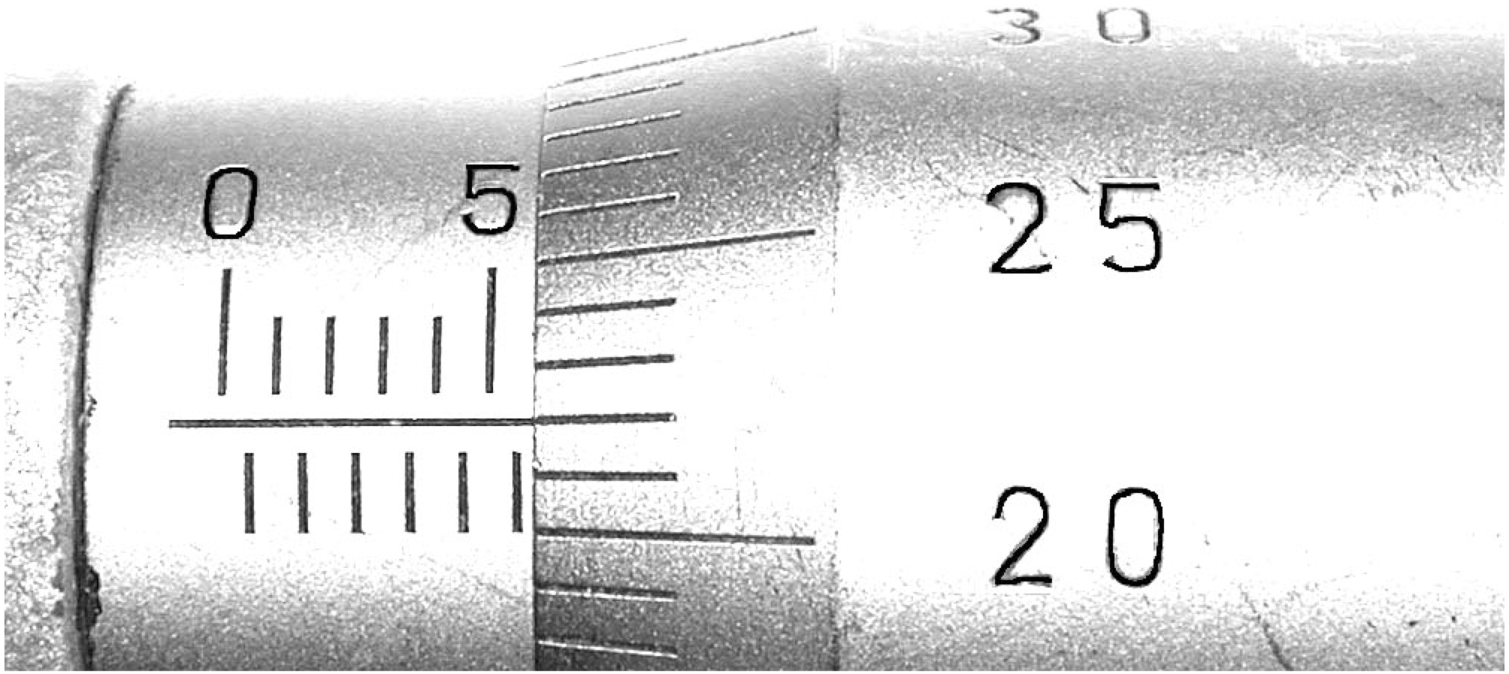
a) 55,22 mm

b) 6,22 mm

c) 5,72 mm

d) 5,22 mm

Mikrometriruuvi



- Kierros yleensä vain 0,5 mm
- Kokonaiset millimetrit ja puolikkaat pääasteikolta (esimerkissä kokonaiset ylhäällä, puolikkaat alhaalla)
- Loput millimetrin sadasosat pyörivältä asteikolta
- Esimerkin lukema 5,72 mm

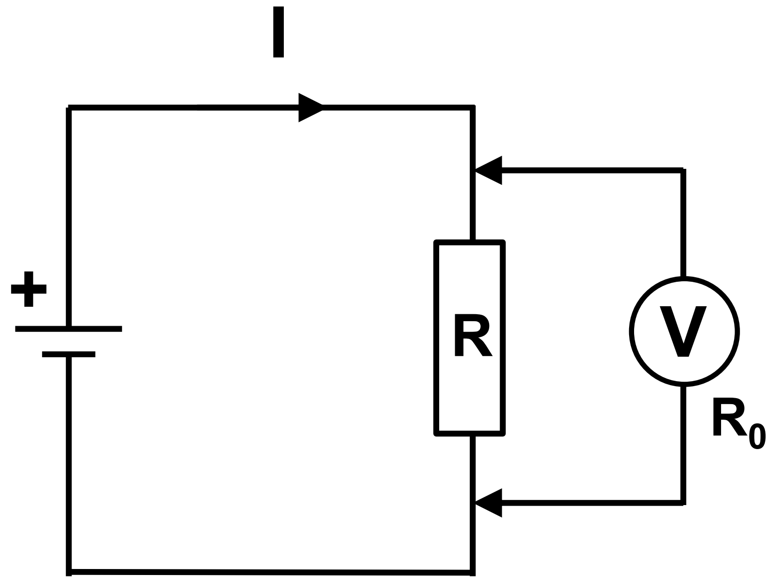
Yleismittari

- Mitä mitataan?
- Asteikko kannattaa valita mahdollisimman herkäksi
- Mittarin virhe ilmoitettu yleensä muodossa x % + x viimeistä desimaalia

Kaikkien mittausten miinusnapa

Yleismittari, jännitteen mittaus

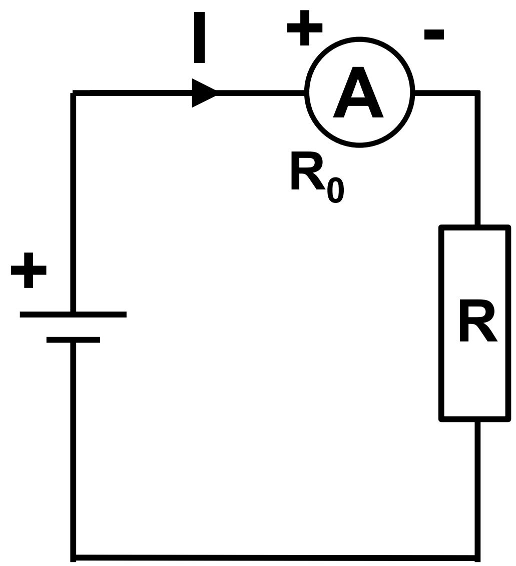
- mittari kytketään rinnan mitattavan laitteen kanssa
- mittarin sisäisen vastuksen R_0 täytyy olla suuri
- ns. “kelluva” mittalaite - mittari näyttää sisääntulonapojensa välisen jännitteen



- näyttää sinimuotoiselle vaihtojännitteelle tehollisarvoa (rms = **r**oot **m**ean **s**quare)

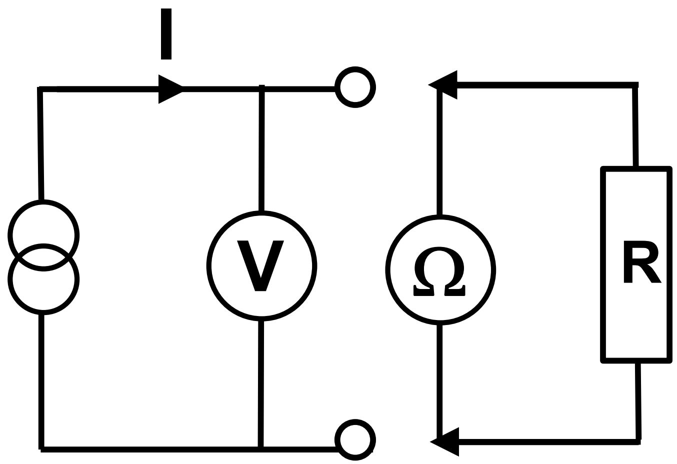
Yleismittari, virran mittaus

- mittari kytketään sarjaan kuormituksen kanssa
- mittarin sisäisen vastuksen R_0 täytyy olla ≈ 0



Yleismittari, resistanssin mittaus

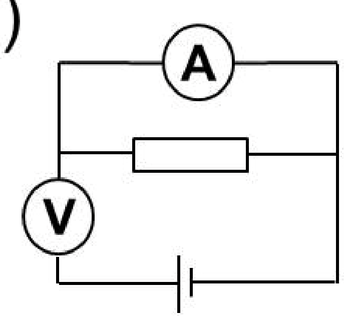
- mittari kytketään vastuksen yli rinnan
- mitattava piiri jännitteetön
- sisäinen vakiovirtalähde, mitataan jännitehäviötä



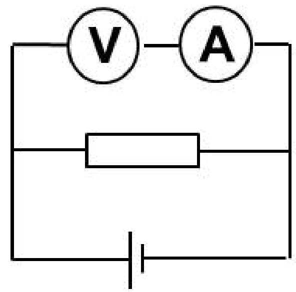
Yleismittari

- Tutkittavana on tasavirtapiiri, jossa tasajännitelähde on kytketty sarjaan vastuksen kanssa. Mikä kytkennöistä on oikein, jos tarkoitus on mitata samanaikaisesti vastuksen yli olevaa jännitehäviötä sekä vastuksen läpi kulkevaa virtaa?

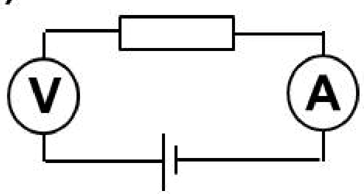
a)



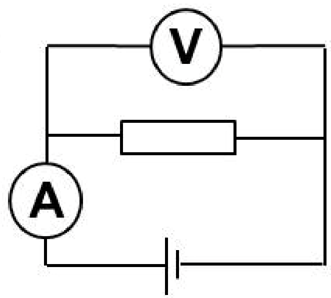
b)



c)

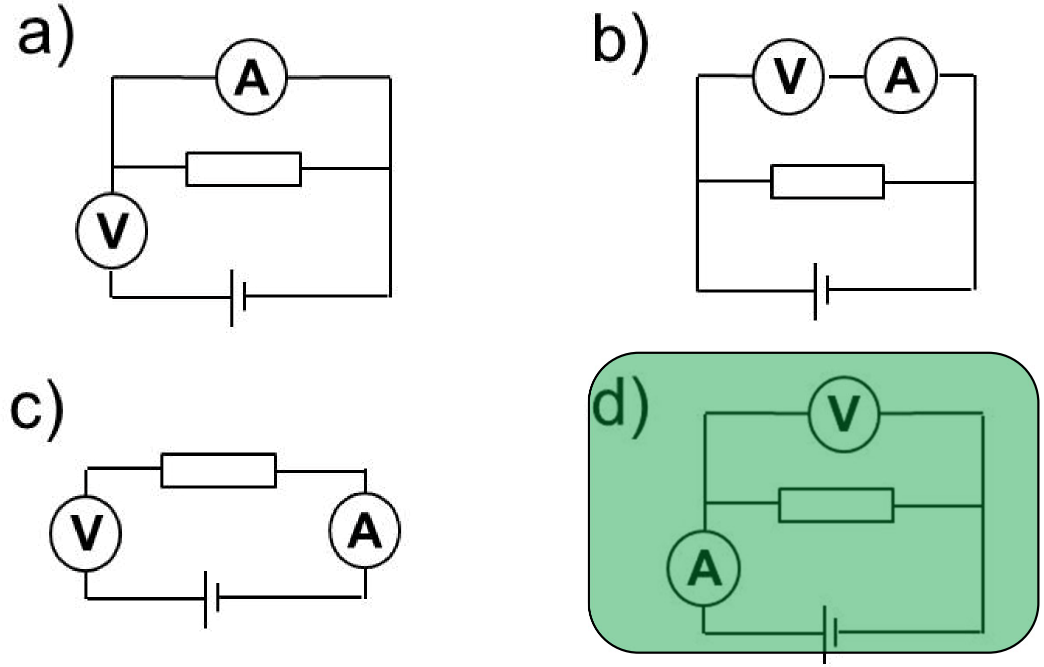


d)



Yleismittari

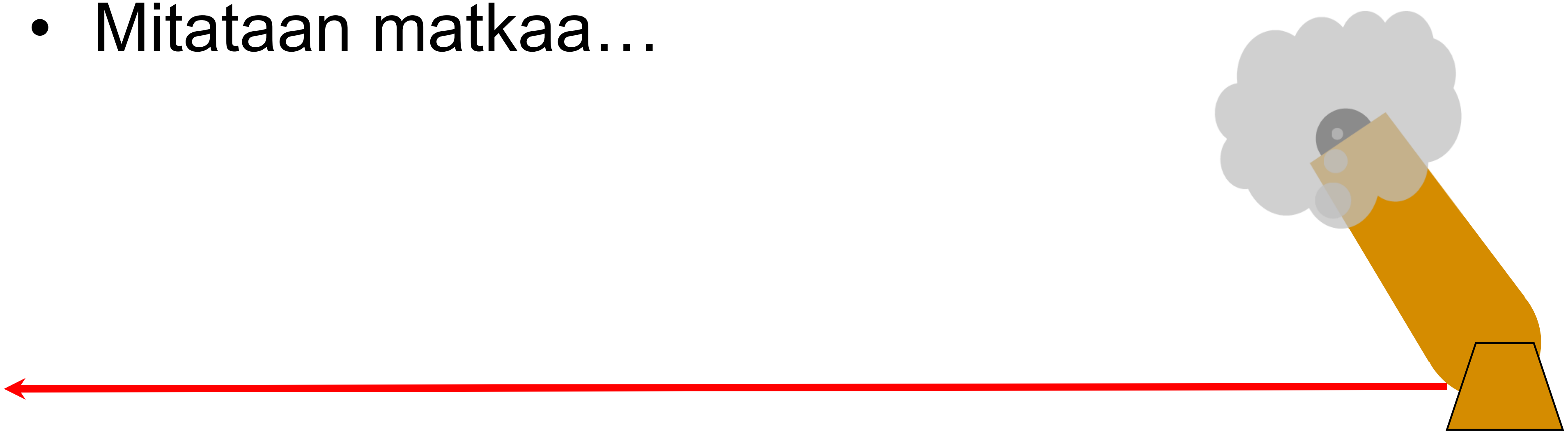
- Tutkittavana on tasavirtapiiri, jossa tasajännitelähde on kytketty sarjaan vastuksen kanssa. Mikä kytkennöistä on oikein, jos tarkoitus on mitata samanaikaisesti vastuksen yli olevaa jännitehäviötä sekä vastuksen läpi kulkevaa virtaa?



d) on oikein, jännite rinnan- ja virta sarjaan-kytkennällä

Toistokoe

- Ei funktiomittaus
- Toistokokeella pyritään selvittämään mitattavan suureen arvo ja mittauksen tarkkuus (tietyissä olosuhteissa)
- Mitataan matkaa…

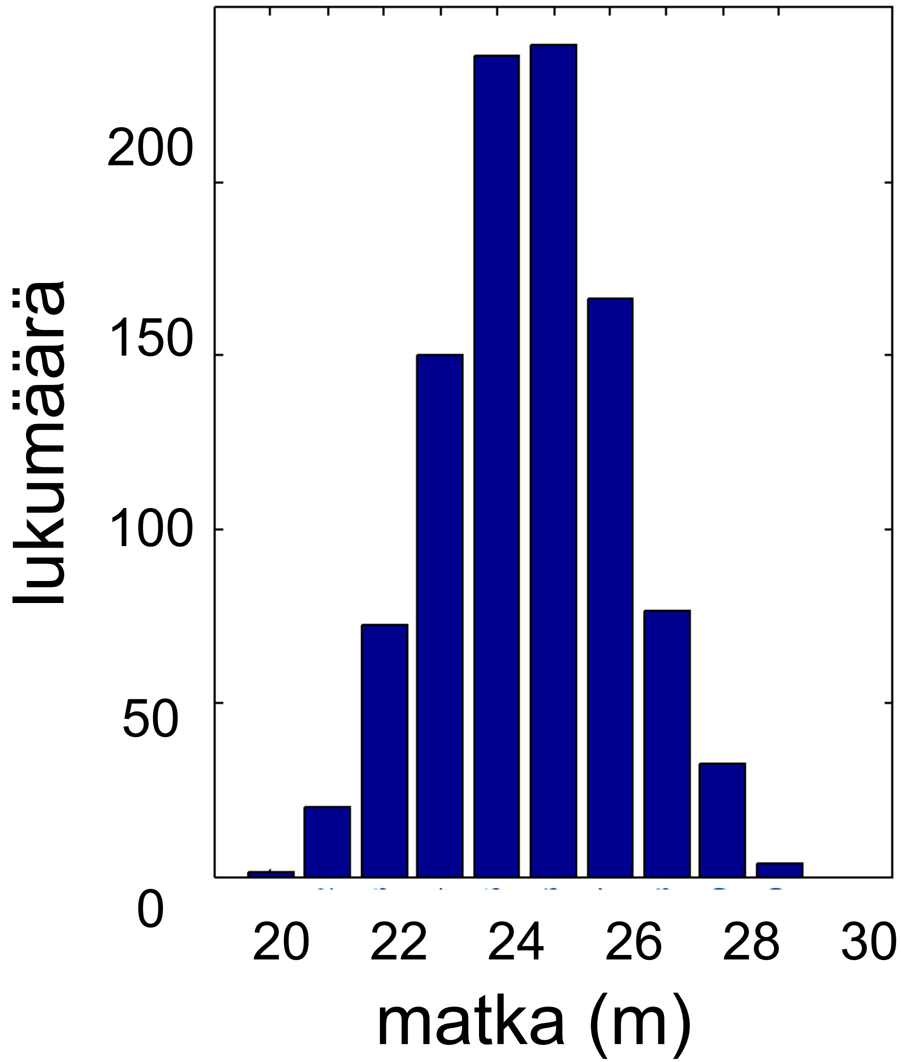


Toistokoe

- Ei funktiomittaus
- Toistokokeella pyritään selvittämään mitattavan suureen arvo ja mittauksen tarkkuus (tietyissä olosuhteissa)
- Yleensä toistomittauksen tulos noudattaa normaalijakaumaa

Toistokoe

- Yleensä toistomittauksen tulos noudattaa normaalijakaumaa kun toistojen määrä kasvaa riittävän suureksi



Toistokoe

Äärellinen määrä (N kpl) havaintoja x_i:

otoskeskiarvo on estimaatti keskiarvolle

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \mu = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

otoskeskihajonta on estimaatti standardipoikkeamalle

$$s = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N-1}} \qquad \sigma = \lim_{N\to\infty}\left[\sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \mu\right)^2}{N-1}}\right]$$

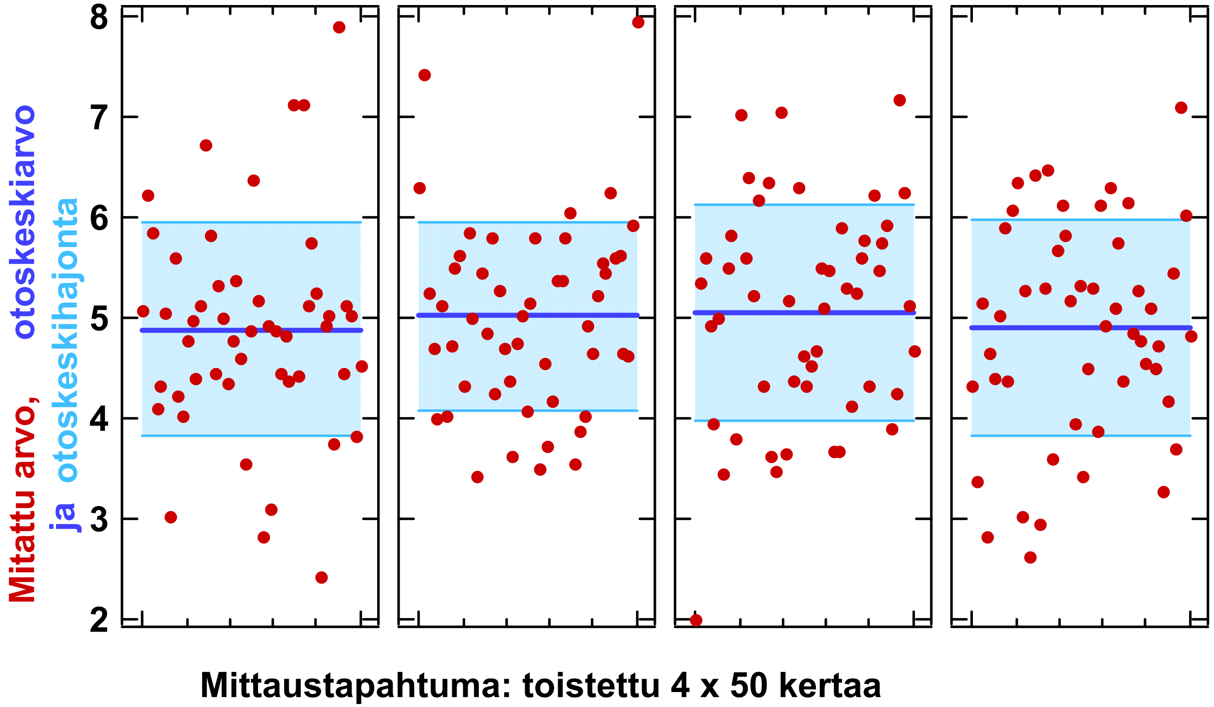
keskiarvon keskivirhe on estimaatti keskiarvon standardipoikkeamalle

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N(N-1)}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Toistokoe

- Otoskeskihajonta kertoo mille alueelle yksittäinen (toisto-) mittaus todennäköisesti (68%) saadaan
- Aina likimain sama otoksen koosta riippumatta
- Vastaa yksittäisen mittauksen virherajaa

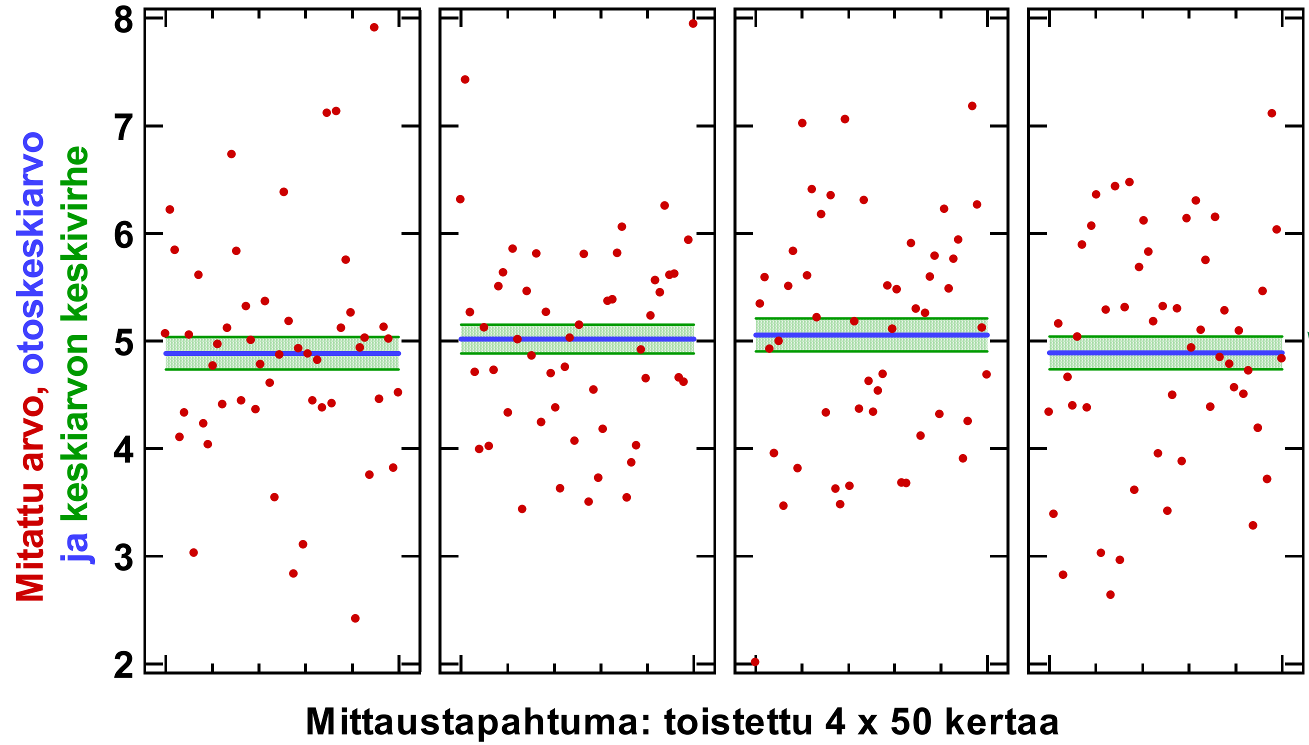


$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\pm s = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N-1}}$$

Toistokoe

- Keskiarvo vaihtelee myös hiukan sarjasta toiseen
- Keskiarvon keskivirhe kertoo mille alueelle toisen samanlaisen mittaussarjan keskiarvo todennäköisesti (68%) saadaan
- Käytetään toistokokeen keskiarvon virhearviona



$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\pm\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

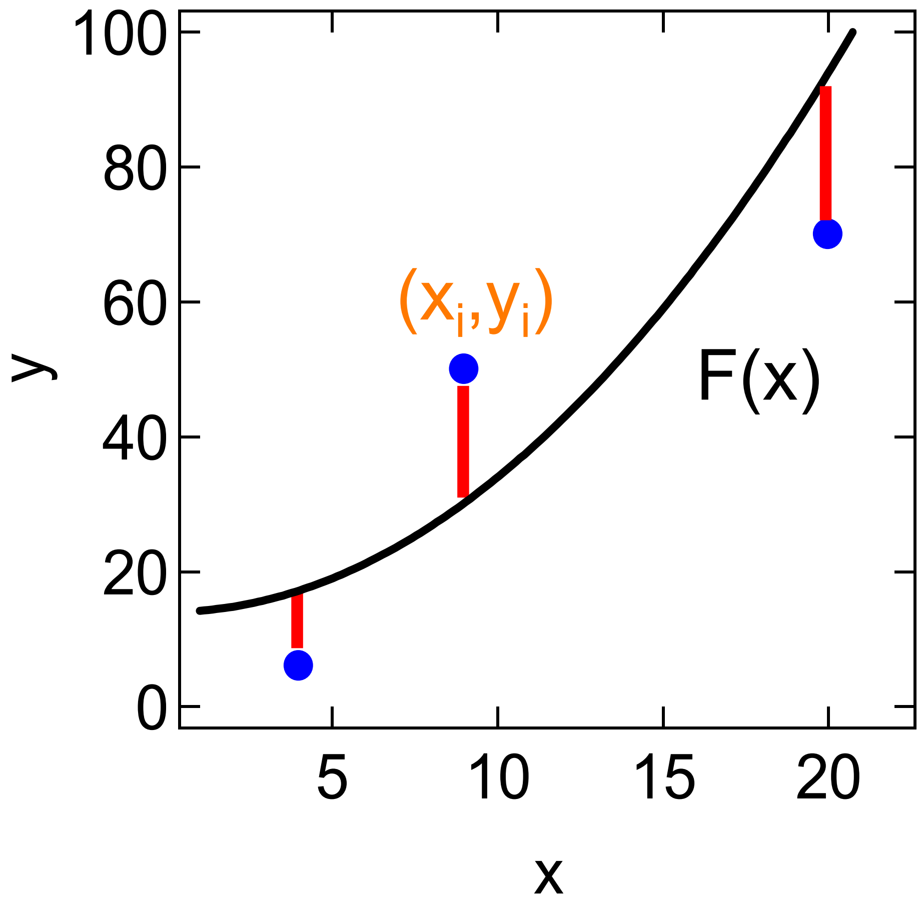
Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

PNS-menetelmä

Pienimmän neliösumman menetelmä

- Suurimman uskottavuuden menetelmä
- Laskennallinen algoritmi, jolla sovitetaan annettu funktio *F(x)* pistejoukkoon minimoimalla neliösummaa

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - F\left(x_i\right) \right]^2$$



Suoran sovittaminen (lineaarinen regressio) PNS-menetelmä

Myös suoran $y=kx+b$ sovittaminen pisteisiin (x_i, y_i). Kun $\Delta y=0$ tai vakio minimoidaan lauseketta

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - kx_i - b\right)^2$$

vaatimalla

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

ja ratkaistaan k ja b.

$$k = \frac{1}{D}\left(N\sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

$$b = \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

$$D = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Suoran sovittaminen (lineaarinen regressio) PNS-menetelmä

Koska kyseessä on tilastollinen menetelmä, saadaan myös Δb ja Δk.

Virhearviot jäljelle jäävästä neliösummasta, joka mittaa sovituksen hyvyyttä

$$\sigma^2 = \frac{1}{(N-2)} \sum (y_i - kx_i - b)^2$$

Virhearviot kulmakertoimelle

$$\Delta k = \sqrt{N \frac{\sigma^2}{D}}$$

ja vakiotermille

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{D} \sum x_i^2}$$

PNS-menetelmä löytyy esim. Excelistä, Matlabista ja Originista. Katso:

http://viesti.physics.aalto.fi/pub/kurssit/Tfy-3.15xx/Luentomat/analyysi.pdf

Virheen kasautuminen

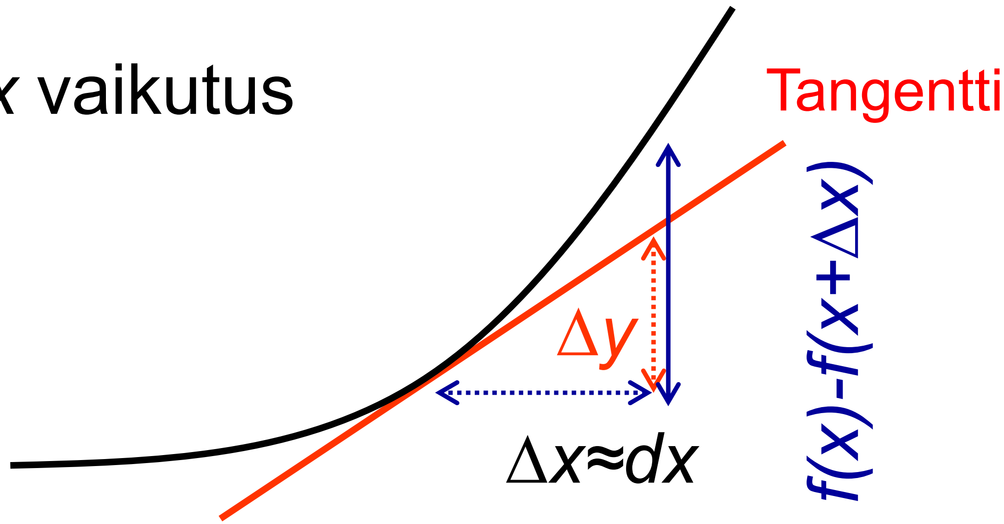
Miten lopputuloksen virhe riippuu mitatun suureen virheestä?

Laskettu tulos *y* riippuu mitatusta suureesta *x* funktion $y = f(x)$ mukaan.

Voitaisiin etsiä funktion min- ja max-arvot alueella $y = f(x \pm \Delta x)$.

Toisaalta mittausvirheen $(\pm)\Delta x$ vaikutus tulokseen on likimäärin

$$\Delta y = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x$$



Virheen kasautuminen

Miten lopputuloksen virhe riippuu mitattujen suureiden virheestä, kun mitattuja suureita on useita ?

- Mittaustulokset x, y ja z sekä riippuvuus f=f(x,y,z)
- Virheet yksittäisille mittauksille Δx, Δy, Δz.
- Yläraja-arvio virheelle saadaan ns. kokonaisdifferentiaalilla

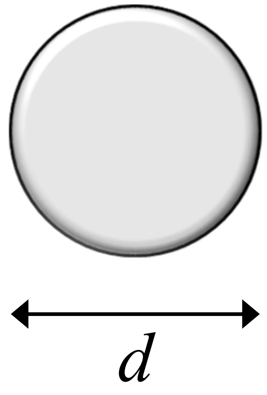
$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z|,$$

jossa termit $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f}{\partial z}$ ovat osittaisderivaattoja.

Suhteellisen virheen hyödyntäminen

- Ei tarvitse derivoida!
- Toimii vain tulomuotoisille funktiolle eli esim. $f(x) = Ax^b$
- Lasketaan kokonaisdifferentiaali ja jaetaan itsellään

Esimerkki virheen laskemisesta



Metallikuulan tiheyden määritys

m = (4,08 ± 0,03) g
d = (1,00 ± 0,02) cm

$$\rho = \frac{6m}{\pi d^3} \approx 7790\,\frac{kg}{m^3}$$

Lasketaan virhe ($\pm\,\Delta\rho$) kokonaisdifferentiaalilla:

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial d}\right|\Delta d = \left|\frac{6}{\pi d^3}\right|\Delta m + \left|-\frac{18m}{\pi d^4}\right|\Delta d \approx 57\,\frac{kg}{m^3} + 467\,\frac{kg}{m^3} = 520\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}067$$

Kirjoitetaan suhteellinen virhe suoraan muistisäännöllä:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|-3\,\frac{\Delta d}{d}\right| \approx 0{,}007 + 0{,}060 = 0{,}067$$

Suhteellinen virhe helppo laskea, käy kurssilla (lähes) aina!

Virhetermien erittely

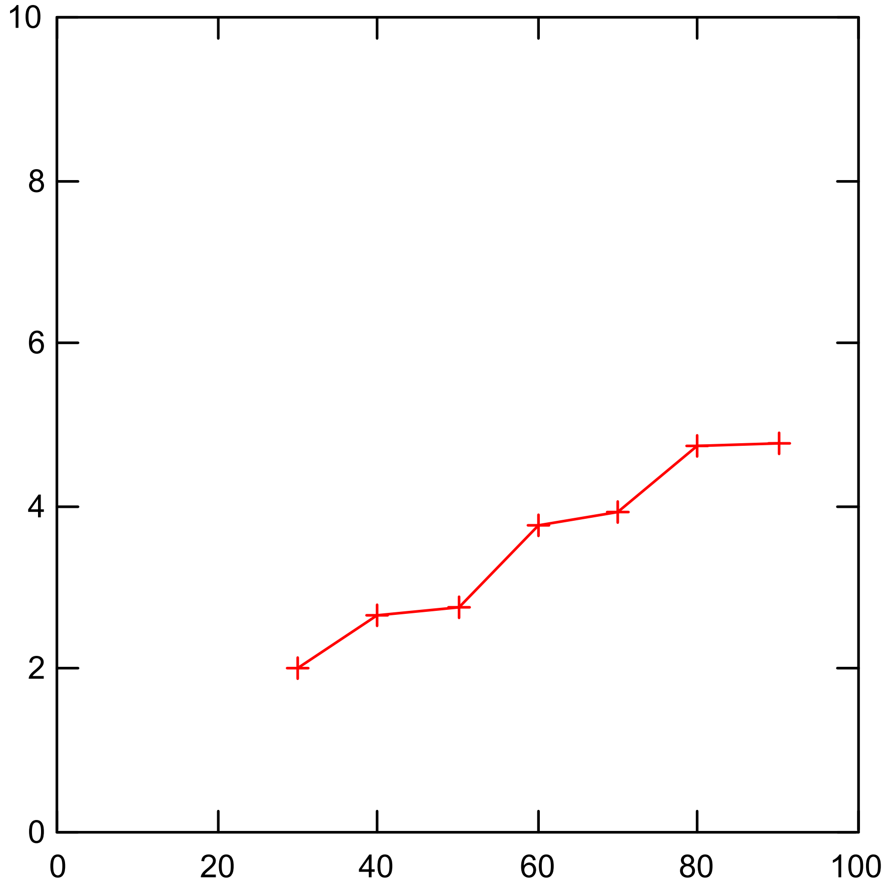
- Ajatuksena eritellä muuttujien aiheuttamat virheet
- Lasketaan muuttujien virheiden suuruudet esiin
- Saadaan selville suurimmat epävarmuuden lähteet

Taulukko 1. Kuulan tiheyden ρ virhetermien erittely

muuttuja	arvo	virhe	virhetermi
m	4,08 g	0,03 g	$\left\lvert\frac{\Delta m}{m}\right\rvert \rho \quad \approx 60\ \mathrm{kg/m^3}$
d	1,00 cm	0,02 cm	$\left\lvert -3\frac{\Delta d}{d}\right\rvert \rho \quad \approx 470\ \mathrm{cm}$

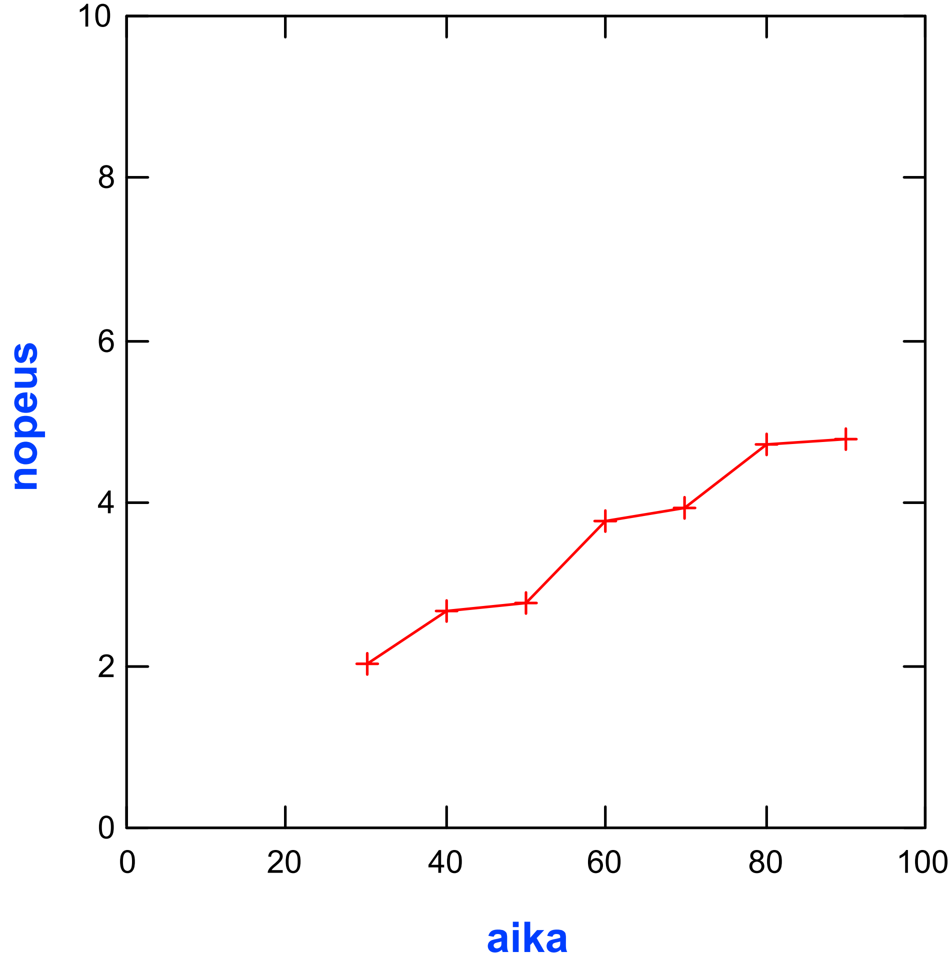
Esimerkki huonosta graafista

- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla



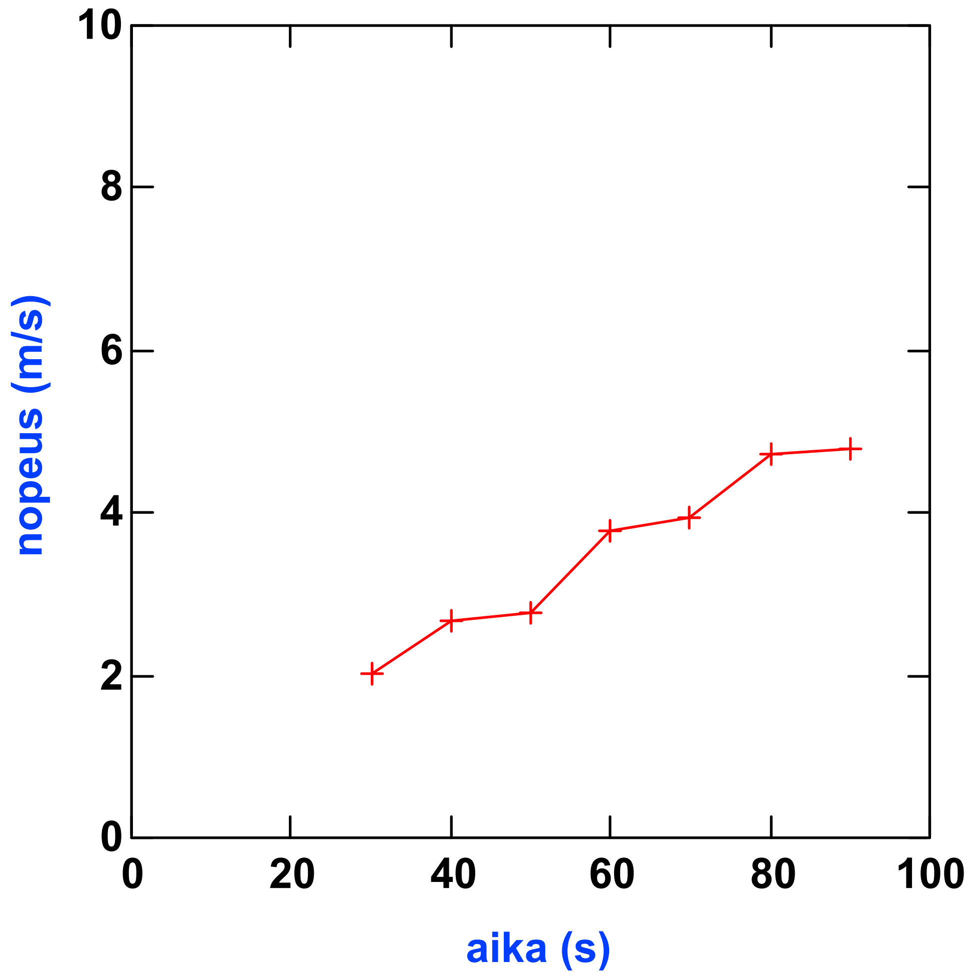
Esimerkki huonosta graafista

- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla



Esimerkki huonosta graafista

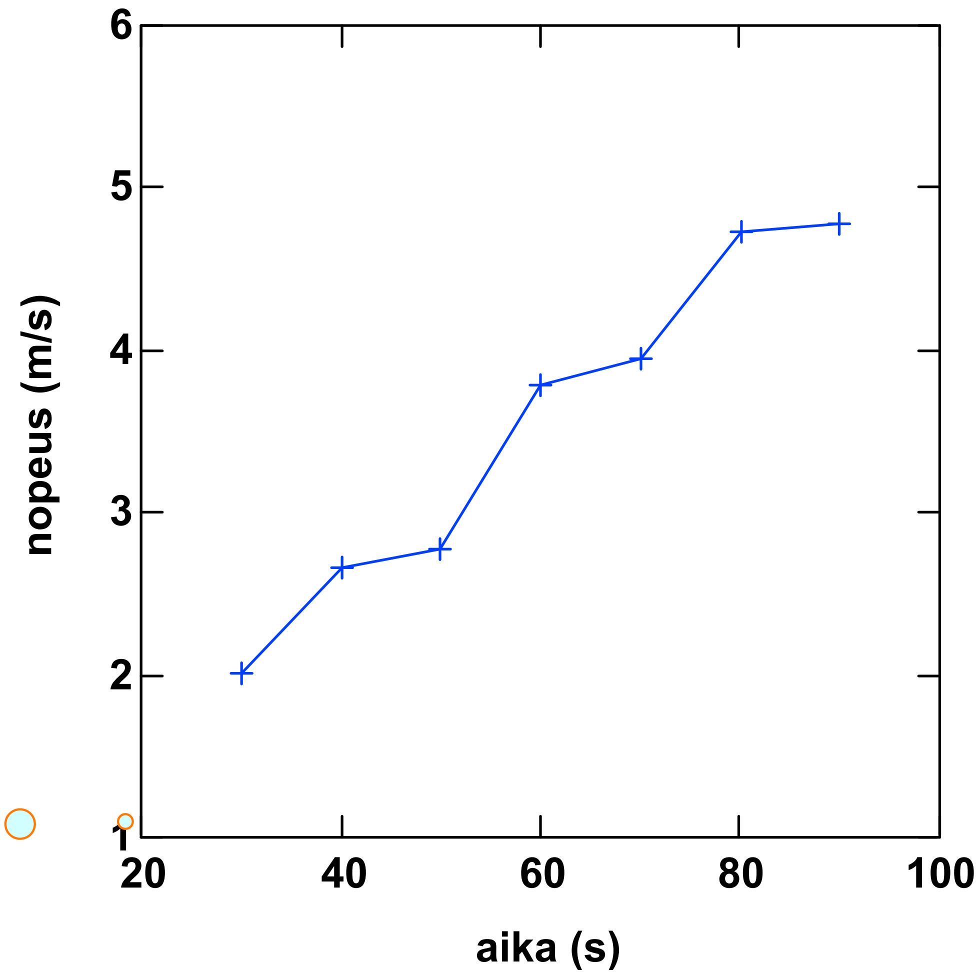
- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla



Esimerkki huonosta graafista

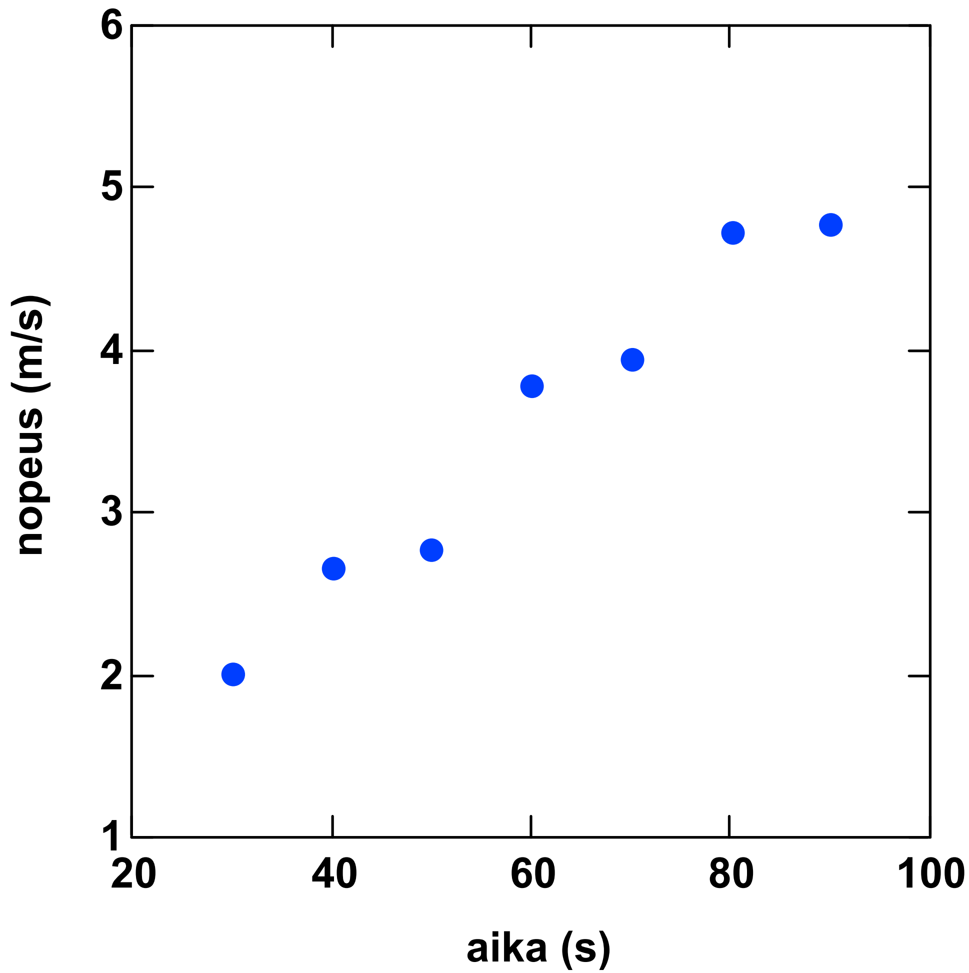
- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla

Nolla ei ole maaginen luku



Esimerkki huonosta graafista

- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla



Esimerkki ei niin huonosta graafista

- Asteikot nimeämättä
- Yksiköt puuttuvat
- Pisteet eivät käytä koko kuva-alaa
- Pisteet yhdistetty murtoviivalla
- (Virherajat puuttuvat)
- Sovitetaan malli